PRINCIPII

DI

STEREODINAMICA

PRINCIPII

DI

STEREODINAMICA

CORSO

sulla Formazione, l'Interpretazione e l'Integrazione delle equazioni del movimento dei solidi

DI

GIAN ANTONIO MAGGI

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1903

INDICE DELLE MATERIE

PARTE PRIMA.

Il Teorema di d'Alembert.

PARTE SECONDA.

Il Teorema di Hamilton.

PARTE TERZA.

Il Teorema di Jacobi.

Prefazione

*Questo libro s'innesta sull'altro, d'indole assai più generale, che, col titolo « Principii della teoria matematica del movimento dei corpi — Corso di Meccanica Razionale », pubblicai, qualche anno fa, in questa stessa raccolta *; in quanto che gli argomenti, che ne formano il principale soggetto, possono considerarsi come sviluppo e complemento di questioni esposte in quel libro con più limitate proporzioni, rispondenti al suo complessivo disegno: mentre altri vi sono toccati di volo, quanto basta per la miglior intelligenza del resto, rimandando, per maggiori particolari, all'esposizione che se ne trova nel libro medesimo. Vi è riprodotto qualche argomento, necessario perchè il nuovo lavoro riuscisse per sè stesso completo: non senza però opportuni adattamenti al presente scopo, ed emendamenti, quando ne tornava il caso.*

Limitando il campo al problema più elementare, ma non per questo meno importante, del movimento dei sistemi di corpi rigidi, e, al medesimo tempo, ampliandone la trattazione, ho mantenuto il principale scopo di spiegare i concetti fondamentali della Meccanica Razionale. Se non che, nel presente caso, inten-

* Milano, Hoepli. (Biblioteca Tecnica), 1896.

diamo stabiliti i principii generali, per proporci l'esposizione particolareggiata e la discussione del procedimento con cui la Meccanica risolve il problema della deduzione del movimento dalle condizioni capaci di determinarlo, serbando ferma tra queste quella che il mobile si possa decomporre in un certo numero di parti invariabili, così da riuscire l'immagine di un sistema di solidi vincolati, gli uni cogli altri, in un modo prestabilito.

Questo procedimento comprende la formazione delle equazioni differenziali del movimento, conformi ai vincoli e alle forze impresse, e l'integrazione delle medesime equazioni. Ne ho qui distribuito l'esposizione in tre parti, intitolate a tre celebri teoremi, che rappresentano, in certo qual modo, il principio cardinale di ciascheduna. Le prime due parti sono dedicate al problema della formazione delle equazioni differenziali: risoluto nella prima, grazie al principio che la potenza delle pressioni traducenti i vincoli, per ogni atto di movimento virtuale, è nulla, il quale ci conduce al teorema di d'Alembert: mentre le trasformazioni dell'equazione madre, che dànno luogo ai teoremi di Hamilton, di Maupertuis e di Gauss, ci forniscono, nella seconda parte, oltre la forma più propria al calcolo delle trovate equazioni differenziali, anche altrettante interpretazioni del loro significato. La terza parte ha per oggetto i principii del metodo generale di Hamilton e di Jacobi per la integrazione delle equazioni della Dinamica, che sviluppo in più ristretta misura, come argomento ch'è pressochè di competenza della pura analisi. Si trova poi, nelle stesse prime parti, interpolata l'integrazione delle equazioni di speciali problemi, introdotti non senza il proposito d'accrescere l'interesse dell'esposizione, ma col principal intento di fissar l'attenzione sul procedimento generale, e perciò trattati in quel modo che meglio m'è parso adatto a conseguirlo.

Propostomi di mantener il libro entro i confini degli elementi della Meccanica Razionale, ho dovuto perciò rinunciare ad ag-

giungervi l'attrattiva di soggetti meno conosciuti e più nuovi. Tuttavia ho procurato di accordarlo coi più recenti progressi di questo ordine di studii. E il disegno, con cui è condotto, mi pare lo distingua da lavori attinenti allo stesso argomento, almeno quanto basta per indicarlo come informato ad un concetto alquanto diverso, e giustificarne con questo la pubblicazione.

Pisa, 8 Marzo, 1902.

GIAN ANTONIO MAGGI.

PARTE PRIMA

IL TEOREMA DI D'ALEMBERT

Relazioni generali traducenti il vincolo della rigidità. *

§ 1. — Il movimento rigido si definisce colla circostanza caratteristica che si può connettere col mobile una terna d'assi coordinati, per rispetto alla quale ogni punto del mobile serba costantemente la stessa posizione.

Indichiamo con α, β, γ le coordinate dell'origine di detta terna, e con $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, $(s = 1, 2, 3)$ i coseni di direzione de' suoi assi per rispetto alla terna degli assi di riferimento, che chiameremo anche terna fissa: e rappresentiamo con $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ e con x, y, z rispettivamente le coordinate del punto generico del mobile rispetto alla terna mobile e alla terna fissa. Avremo le relazioni atte a definire il movimento rigido,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} \\ y &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z} \\ z &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sono costanti, mentre le rimanenti lettere sono simboli di variabili col tempo.

---

* Cfr. *Meccanica* §§ 85 e segg., 158 e segg. — Sotto questo titolo intendo qua e in seguito il mio libro citato nella Prefazione.

Rammentiamo ora le relazioni

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$
$$\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0,$$
$$(\alpha, \beta, \gamma)$$

dove il simbolo della sostituzione circolare indica che con questa da ciascuna equazione scritta se ne devono ricavare due altre: dalle quali segue

$$\Sigma_s \alpha_s \frac{d\alpha_s}{dt} = 0 \qquad \Sigma_s \beta_s \frac{d\gamma_s}{dt} + \Sigma_s \gamma_s \frac{d\beta_s}{dt} = 0 \tag{2}$$

Poniamo, conformemente alle seconde,

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma_s \beta_s \dfrac{d\gamma_s}{dt} = p, & \Sigma_s \gamma_s \dfrac{d\beta_s}{dt} = -p, \\ \Sigma_s \gamma_s \dfrac{d\alpha_s}{dt} = q, & \Sigma_s \alpha_s \dfrac{d\gamma_s}{dt} = -q, \\ \Sigma_s \alpha_s \dfrac{d\beta_s}{dt} = r, & \Sigma_s \beta_s \dfrac{d\alpha_s}{dt} = -r. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Si troverà subito, riunendo a tre a tre le due equazioni di questa sestupla e quella della prima terna delle (2), dove figura la derivata di una stessa lettera,

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = q\gamma_s - r\beta_s, \quad \frac{d\beta_s}{dt} = r\alpha_s - p\gamma_s, \quad \frac{d\gamma_s}{dt} = p\beta_s - q\alpha_s \tag{4}$$
$$(s = 1, 2, 3)$$

primo quadro delle « formole di Poisson ».

Derivando le (1), otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\alpha_1}{dt}\mathfrak{x} + \dfrac{d\alpha_2}{dt}\mathfrak{y} + \dfrac{d\alpha_3}{dt}\mathfrak{z} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\beta_1}{dt}\mathfrak{x} + \dfrac{d\beta_2}{dt}\mathfrak{y} + \dfrac{d\beta_3}{dt}\mathfrak{z} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\gamma_1}{dt}\mathfrak{x} + \dfrac{d\gamma_2}{dt}\mathfrak{y} + \dfrac{d\gamma_3}{dt}\mathfrak{z}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Le quali relazioni, introducendovi le (4), e ponendo

$$\frac{d\alpha}{dt} = l, \qquad \frac{d\beta}{dt} = m, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = n, \tag{6}$$

forniscono, valendosi delle stesse (1), e indicando con u, v, w le componenti della velocità del punto in discorso, al supposto istante,

$$\left.\begin{aligned} u &= l + q(z-\gamma) - r(y-\beta) \\ v &= m + r(x-\alpha) - p(z-\gamma) \\ w &= n + p(y-\beta) - q(x-\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Queste equazioni esprimono che l'atto di movimento del mobile, ad ogni istante, è composto di un atto di movimento traslatorio, la cui velocità è la velocità di un punto scelto a piacere, e di un atto di movimento rotatorio, il cui asse passa per questo punto, e la cui velocità angolare ha per componenti p, q, r, con che riesce indipendente dalla scelta di detto punto *.

Questo è dunque il significato meccanico dei parametri p, q, r.

Osservazione. — Le (7), scritte *a priori,* e *riferite ad un istante,* rappresentano, per quanto precede, la velocità a questo istante, del punto di un corpo rigido, a cui compete, allo stesso istante, il posto (x, y, z), nell'atto di movimento per cui (l, m, n) è la velocità del punto dello stesso corpo rigido a cui compete il posto (α, β, γ), e (p, q, r) è la velocità angolare.

Questo non esclude che, riferendosi ad istanti diversi, i posti (x, y, z) e (α, β, γ) possano competere a punti diversi del corpo rigido. Se non che le (6), e le formole più generali

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

---

* Atto di movimento di un sistema mobile, ad un istante, chiamiamo l'insieme delle velocità dei singoli punti, riferite, ciascuna, al relativo punto: specie dell'atto di movimento, ogni particolar relazione fra i punti e le competenti velocità: atto di movimento traslatorio e rotatorio, quello che appartiene, ad ogni istante, ad un movimento traslatorio e rotatorio, e dà luogo ad un movimento elementare traslatorio e rotatorio rispettivamente. Cfr. *Meccanica*, §§ 148 e seg.

si verificheranno solo a condizione che α, β, γ e x, y, z, rispettivamente, rappresentino, come precedentemente, *al variar del tempo,* le coordinate di un punto che permanentemente appartiene al corpo rigido considerato.

Riserberemo, di regola, a quest'ultima ipotesi i simboli α, β, γ. Diversamente, ci varremo più spesso di a, b, c: col qual significato, posto

$$\left.\begin{aligned} u &= l + q(z - c) - r(y - b) \\ v &= m + r(x - a) - p(z - c) \\ w &= n + p(y - b) - q(x - a), \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

l, m, n, rappresenteranno sempre le componenti della velocità del punto del corpo rigido cui compete, al supposto istante, il posto (a, b, c), ma alle (6) si dovranno sostituire

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{d\alpha}{dt} - q(\gamma - c) + r(\beta - b) \\ m &= \frac{d\beta}{dt} - r(\alpha - a) + p(\gamma - c) \\ n &= \frac{d\gamma}{dt} - p(\beta - b) + q(\alpha - a). \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Nel caso in discorso rientra l'ipotesi che l, m, n rappresentino le componenti della velocità al supposto istante del punto che cade nell'origine, concepito come invariabilmente unito al solido. Le precedenti formole diventano allora

$$u = l + qz - ry, \qquad v = m + rx - pz, \qquad w = n + py - qx \quad (5'')$$

$$l = \frac{d\alpha}{dt} - q\gamma + r\beta, \quad m = \frac{d\beta}{dt} - r\alpha + p\gamma, \quad n = \frac{d\gamma}{dt} - p\beta + q\alpha, \quad (6'')$$

ricevendone quella più semplice espressione sotto la quale le adopereremo ripetutamente in seguito.

§ 2. — Teniamo presente la tabelletta

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

e indichiamo con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della suddetta velocità angolare del mobile, ad un istante qualsivoglia, rispetto alle terna degli assi delle $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ — cioè rispetto ad una terna d'assi aventi l'orientazione degli assi mobili, allo stesso istante.

Una nuova serie di relazioni si ricava immediatamente dalle precedenti, applicandole al movimento della terna degli assi fissi, relativo alla terna degli assi mobili, considerati, alla lor volta, come fissi: il quale è manifestamente un movimento rigido la cui velocità angolare, ad ogni istante, è eguale e contraria a quella della terna degli assi mobili. Per modo che basta mutare, nelle precedenti formole, i simboli dei coseni, come risulta dallo scambio delle righe e delle colonne della ricordata tabelletta, e sostituire $-\mathfrak{p}$, $-\mathfrak{q}$, $-\mathfrak{r}$ a p, q, r.

Così otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p} &= S\alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} = -S\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} \\ \mathfrak{q} &= S\alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} = -S\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} \\ \mathfrak{r} &= S\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} = -S\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove il simbolo sommatorio S indica che altri due termini si

debbono dedurre dallo scritto, mutando α in β e in γ. Oltre di che

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\lambda_1}{dt}=\lambda_2\mathfrak{r}-\lambda_3\mathfrak{q}, \qquad \dfrac{d\lambda_2}{dt}=\lambda_3\mathfrak{p}-\lambda_1\mathfrak{r}, \qquad \dfrac{d\lambda_3}{dt}=\lambda_1\mathfrak{q}-\lambda_2\mathfrak{p} \\ (\lambda=\alpha,\beta,\gamma); \end{array}\right\} \quad (2)$$

che è il secondo quadro delle « formole di Poisson ».

Osservazione. — Moltiplicando le (5) del § 1 per α_1, β_1 γ_1, α_2, β_2, γ_2 e α_2, β_3, γ_3 rispettivamente, e ciascuna volta sommando, se ne ricava, in virtù delle precedenti relazioni,

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{l}+\mathfrak{q}\,\mathfrak{z}-\mathfrak{r}\,\mathfrak{y} \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{m}+\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}-\mathfrak{p}\,\mathfrak{z} \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{n}+\mathfrak{p}\,\mathfrak{y}-\mathfrak{q}\,\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

le quali sono una nuova forma delle (7) del § 1.

§ 3. — I nove coseni α_s, β_s, γ_s $(s=1, 2, 3)$, in virtù delle sei relazioni indipendenti, che esistono fra essi, si possono, in molteplici modi, esprimere per mezzo di tre parametri indipendenti.

Rammentiamo gli « angoli di direzione » della terna mobile per rispetto alla terna di riferimento, come sono definiti da Kirchhoff*. Questi sono l'angolo formato dal semipiano terminato all'asse delle z, che comprende l'asse delle $\mathfrak{z}$ positive, col semipiano terminato allo stesso asse delle z, contenente l'asse delle x positive, inteso crescente nel senso del giro positivo per rispetto all'asse delle z: l'angolo formato dal semipiano terminato all'asse delle $\mathfrak{z}$, che comprende l'asse delle z positive, col semipiano terminato allo stesso asse delle $\mathfrak{z}$, contenente l'asse delle $\mathfrak{x}$ positive, inteso crescente nel senso del giro positivo per rispetto all'asse delle $\mathfrak{z}$: l'angolo formato dall'asse delle $\mathfrak{z}$ coll'asse delle z. I quali angoli, in una posizione isolatamente considerata, s'intenderanno positivi, e i due primi minori di quattro retti, il terzo minore di due retti; mentre, in una posizione, che succeda ad un'altra, in seguito ad un certo movimento, si attribuirà loro quel valore, ch'è prescritto dalla continuità. Le loro misure si

---

* *Mechanik*, 5te Vorlesung, § 1.

indicheranno ordinariamente con φ, f, θ; e perciò questi saranno numeri, che, in una posizione isolatamente considerata, saranno compresi tra o e 2π i primi due, tra o e π il terzo.

Ciò posto, si trova senza difficoltà *,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\sin\varphi\sin f - \cos\varphi\cos f\cos\theta \\
\beta_1 &= \cos\varphi\sin f - \sin\varphi\cos f\cos\theta \\
\gamma_1 &= \cos f\sin\theta \\
\alpha_2 &= \sin\varphi\cos f - \cos\varphi\sin f\cos\theta \\
\beta_2 &= -\cos\varphi\cos f - \sin\varphi\sin f\cos\theta \\
\gamma_2 &= \sin f\sin\theta \\
\alpha_3 &= \cos\varphi\sin\theta \\
\beta_3 &= \sin\varphi\sin\theta \\
\gamma_3 &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Come pure, introducendo queste relazioni nelle (3) del § 1, e nelle (1) del § 2, ne risulta

$$\left.\begin{aligned}
p &= -\alpha_3\frac{df}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt} \\
q &= -\beta_3\frac{df}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt} \\
r &= -\gamma_3\frac{df}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= \gamma_1\frac{d\varphi}{dt} + \sin f\frac{d\theta}{dt} \\
\mathfrak{q} &= \gamma_2\frac{d\varphi}{dt} - \cos f\frac{d\theta}{dt} \\
\mathfrak{r} &= \gamma_3\frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Queste formole esprimono semplicemente che la velocità angolare del mobile ad ogni istante è la somma geometrica delle tre aventi l'asse delle z, l'asse delle ζ, e la perpendicolare al piano dei due assi, volta nel senso positivo rispetto al giro che con-

* *Meccanica*, § 24.

duce per l'angolo concavo dall'asse delle z all'asse delle $\mathfrak{z}$, per rispettivo asse, e $\frac{d\varphi}{dt}$, $-\frac{df}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$ per corrispondente misura. E, conformemente a tale interpretazione, possono agevolmente stabilirsi, con diretto ragionamento, valendosi del principio della sovrapposizione degli spostamenti estremamente piccoli.

§ 4. — Introducendo le (7) del § 1 nell'equazione della conservazione della massa, o della continuità *,

$$\frac{dk}{dt}+k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

dove k e u, v, w rappresentano la grandezza della densità e le componenti della velocità nel punto generico del mobile, oltre di che $\frac{d}{dt}$ indica il coefficiente differenziale calcolato riferendosi, al variar del tempo, ad uno stesso punto del mobile, cioè ad un punto individuato da una determinata posizione iniziale, si ottiene

$$\frac{dk}{dt}=0, \qquad k=\text{cost.}$$

Vale a dire, consegue dal vincolo della rigidità che ogni punto del mobile conserva, nelle varie posizioni che assume al variar del tempo, quel valore della densità che gli compete in una posizione speciale qualsivoglia.

Ciò val quanto dire che la densità k è semplicemente funzione delle coordinate $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ del relativo punto rispetto agli assi mobili, connessi col corpo, le quali individuano ad ogni istante il punto a cui compete una determinata posizione iniziale.

Espressioni relative al movimento rigido.

§ 5. — Indicheremo, in generale, con τ la grandezza del volume di un mobile rigido, come pure la figura invariabile da esso rappresentata ad ogni istante, il cui punto generico è in-

* *Meccanica*, § 240.

dividuato dalle coordinate $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ relative agli assi mobili, connessi col corpo: per modo che — giova notare — queste, in ogni integrazione estesa alla figura τ, sono le variabili d'integrazione, mentre $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$, ossia φ, f, θ (cfr. §§ precedenti) vi fungono da parametri costanti. Inoltre indicheremo con k la grandezza della densità, funzione puramente di $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ (§ 4), nel punto generico della figura τ. E converremo che, di regola, le lettere tedesche rappresentino gli elementi riferiti agli assi mobili, connessi col corpo, definiti, mediante le corrispondenti lettere latine, per rispetto agli assi fissi.

§ 6. — Nell'espressione della grandezza della forza viva

$$T = \frac{1}{2} \int_\tau k\,(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau,$$

dove u, v, w indicano le componenti della velocità del punto generico, rispetto ai supposti assi, introducendo le (7″) del § 1, otteniamo

$$T = T' + T'' + T''': \tag{1}$$

dove

$$T' = \frac{1}{2} M(l^2 + m^2 + n^2), \tag{2}$$

posto

$$M = \int_\tau k\,d\tau,$$

per modo che M rappresenta la grandezza della massa del mobile, e T' la grandezza della forza viva competente all'atto di movimento traslatorio la cui velocità è (l, m, n):

$$T'' = M\left[l\left(q\bar{z} - r\bar{y}\right) + m\left(r\bar{x} - p\bar{z}\right) + n\left(p\bar{y} - q\bar{x}\right)\right] \tag{3}$$

posto

$$M\bar{x} = \int_\tau k\,x\,d\tau, \qquad M\bar{y} = \int_\tau k\,y\,d\tau, \qquad M\bar{z} = \int_\tau k\,z\,d\tau, \tag{4}$$

per modo che $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ rappresentano le coordinate del centro di massa del corpo, e $T'' : M$ il prodotto scalare della velocità (l, m, n) e della velocità del centro di massa nell'atto di movimento rotatorio il cui asse passa per l'origine delle coordinate — punto la cui velocità è (l, m, n) — e la velocità angolare è (p, q, r):

$$T''' = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Drp - 2Epq\right) \quad (5)$$

posto

$$\left.\begin{array}{lll} A = \int_\tau k(y^2+z^2)d\tau, & B = \int_\tau k(z^2+x^2)d\tau, & C = \int_\tau k(x^2+y^2)d\tau \\ D = \int_\tau kyz\,d\tau, & E = \int_\tau kzx\,d\tau, & F = \int_\tau kxy\,d\tau \end{array}\right\} (6)$$

per modo che A, B, C rappresentano la grandezza del momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse delle x, delle y e delle z: D, E, F la grandezza dei momenti complessi rispetto alle coppie di piani coordinati che s'intersecano secondo gli stessi assi rispettivamente: e T''' la grandezza della forza viva competente al suddetto atto di movimento rotatorio.

Nelle applicazioni giova più comunemente riferire la precedente espressione agli assi connessi col corpo, con che

$$T' = \frac{1}{2} M(\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2) \quad (2')$$

$$T'' = M\left[\mathfrak{l}\left(\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{y}}\right) + \mathfrak{m}\left(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{z}}\right) + \mathfrak{n}\left(\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{x}}\right)\right] \quad (3')$$

$$T''' = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2 - 2\mathfrak{D}\mathfrak{q}\mathfrak{r} - 2\mathfrak{E}\mathfrak{r}\mathfrak{p} - 2\mathfrak{F}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\right) \quad (5')$$

dove $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, coordinate del centro di massa rispetto alla terna degli assi connessi col corpo, e $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, elementi d'inerzia appartenenti alla stessa terna, riescono invariabili col tempo *.

* Ordinariamente adopereremo le lettere latine, non occorrendo il caso di considerar elementi d'inerzia rispetto ad assi variabili rispetto al mobile.

Notiamo che l'atto di movimento rotatorio il cui asse passa per l'origine delle coordinate — punto di velocità $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ — e la velocità angolare è $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ appartiene al movimento relativo ad una terna d'assi, in moto traslatorio, coll'origine in detto punto, concepito come invariabilmente unito col solido.

§ 7. — La definizione

$$K = \int_{\tau} k \rho^2 \, d\tau \qquad (1)$$

— dove ρ indica la grandezza della distanza del punto generico del corpo considerato da una retta qualsivoglia — del momento d'inerzia del corpo rispetto a questa retta fornisce

1° pei momenti d'inerzia, K e K', rispetto a due rette parallele, la cui mutua distanza ha grandezza δ, la relazione

$$K' = K + M\delta^2 - 2\, M\delta\varepsilon \cos\alpha, \qquad (1)$$

dove ε indica la grandezza della distanza del centro di massa dalla prima retta, e α quella dell'angolo formato dai semipiani terminati alla prima retta contenenti rispettivamente la seconda retta e il centro di massa:

2° per espressione del momento d'inerzia rispetto alla retta passante per l'origine delle coordinate, la quale, presa con un certo senso, ha λ, μ, ν per coseni di direzione:

$$K = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2\, D\mu\nu - 2\, E\nu\lambda - 2\, F\lambda\mu, \qquad (2)$$

dove i coefficienti sono dati dalle (6) del paragrafo precedente.

Da questa espressione scaturisce che la grandezza del momento d'inerzia rispetto ad una retta qualsivoglia passante per un punto riesce inversamente proporzionale al quadrato del raggio spiccato dal punto, colla stessa direzione, e terminato alla sua intersezione con un ellissoide determinato, salvo un fattore di omotetia: l'ellissoide d'inerzia relativo al punto. Che se si forma la terna degli assi coordinati cogli assi principali di questo ellissoide, si troverà fra A, B, C la grandezza del massimo e del minimo momento d'inerzia rispetto ad una retta passante pel punto considerato, e risulterà

$$D = E = F = 0.$$

Gli assi di detto ellissoide e i relativi momenti si chiamano assi e momenti principali d'inerzia relativi al punto: se questo è il centro di massa, si distinguono colla qualifica di elementi d'inerzia centrali *.

§ 8. — Riprendiamo ora la formola (1) del § 6. Se la terna degli assi a cui si riferisce è formata cogli assi principali d'inerzia relativi al punto assunto come origine, riesce

$$T''' = \frac{1}{2}\left(P\,\mathfrak{p}^2 + Q\,\mathfrak{q}^2 + R\,\mathfrak{r}^2\right), \qquad (1)$$

indicando con P, Q, R le grandezze dei momenti principali d'inerzia corrispondenti. Se, inoltre, si assume per detta origine il centro di massa, si ha

$$T'' = 0.$$

Per modo che, verificandosi le due ipotesi ad un tempo, l'espressione della forza viva acquista la sua forma più semplice

$$T = \frac{1}{2}\left(M\,\overline{\mathrm{v}}^2 + P\,\mathfrak{p}^2 + Q\,\mathfrak{q}^2 + R\,\mathfrak{r}^2\right), \qquad (2)$$

dove $\overline{\mathrm{v}}$ indica la grandezza della velocità del centro di massa.

§ 9. — Introducendo le (5″) del § 1 in

$$\int_\tau k\left(y\,w - z\,v\right)d\tau, \quad \int_\tau k\left(z\,u - x\,w\right)d\tau, \quad \int_\tau k\left(x\,v - y\,u\right)d\tau, \qquad (1)$$

componenti del momento delle quantità di moto, al considerato istante, o della quantità di moto areale, allo stesso istante, rispetto all'origine delle coordinate come polo **, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} M(\bar{y}\,n - \bar{z}\,m) + A\,p - 2\,F\,q - 2\,E\,r \\ M(\bar{z}\,l - \bar{x}\,n) + B\,q - 2\,D\,r - 2\,F\,p \\ M(\bar{x}\,m - \bar{y}\,l) + C\,r - 2\,E\,p - 2\,D\,q. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

* Cfr. *Meccanica*, §§ 277 e segg.

** *Meccanica*, § 307.

La prima parte appartiene all'atto di movimento traslatorio la cui velocità è (l, m, n), quella del punto che cade nell'origine: la seconda all'atto di movimento rotatorio il cui asse passa per l'origine, e la velocità angolare è $(p\, q\, r)$.

Ne viene, nell'ipotesi di un atto di movimento rotatorio, come il suddetto, il cui asse passa per l'origine, rispetto ad una terna formata cogli assi principali d'inerzia nella stessa origine,

$$P\mathfrak{p}, \qquad Q\mathfrak{q}, \qquad R\mathfrak{r}: \tag{3}$$

donde, rispetto ad assi quali si vogliano, indicando con $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ i coseni di direzione dei suddetti assi principali d'inerzia *:

$$\left.\begin{array}{l} P\mathfrak{p}\,\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\,\alpha_2 + R\mathfrak{r}\,\alpha_3 \\ P\mathfrak{p}\,\beta_1 + Q\mathfrak{q}\,\beta_2 + R\mathfrak{r}\,\beta_3 \\ P\mathfrak{p}\,\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\,\gamma_2 + R\mathfrak{r}\,\gamma_3. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Osserviamo ancora che, se si assume per polo il centro di massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, da

$$\int_\tau k(x-\bar{x})\,d\tau = 0, \quad \int_\tau k(y-\bar{y})\,d\tau = 0, \quad \int_\tau k(z-\bar{z})\,d\tau = 0$$

(cfr. (4) del § 6), si ricava

$$\left.\begin{array}{r} \int_\tau k\left[(y-\bar{y})\,w - (z-\bar{z})v\right] d\tau = \\ \int_\tau k\left[(y-\bar{y})(w-\bar{w}) - (z-\bar{z})(v-\bar{v})\right] d\tau, \text{ ecc.} \end{array}\right\} \tag{5}$$

con che riescono fra loro eguali i momenti delle quantità di moto, o le quantità di moto areali, rispetto al centro di massa come polo, nel movimento assoluto e nel movimento relativo al centro di massa — cioè nel movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro di massa.

---

* *Meccanica*, § 308.

§ 10. — *Supposto il punto a. b. c fisso*, le componenti secondo gli assi fissi

$$-\int_{\tau} k\left[(y-b)\frac{d^2 z}{dt^2}-(z-c)\frac{d^2 y}{dt^2}\right]d\tau \quad \dots \quad \dots$$

del momento delle forze d'inerzia rispetto al punto (a, b, c) come polo *, si possono porre sotto la forma

$$-\frac{d}{dt}\int_{\tau} k\left[(y-b)\frac{dz}{dt}-(z-c)\frac{dy}{dt}\right]d\tau \quad \dots \quad \dots$$

con che detto momento, col senso invertito, riesce la derivata geometrica del momento delle quantità di moto, o della quantità di moto areale, rispetto allo stesso punto fisso come polo. Ne viene immediatamente, per le (4) del paragrafo precedente, inteso che gli elementi d'inerzia si riferiscono al polo, l'espressione

$$-\frac{d(P\mathfrak{p}z_1+Q\mathfrak{q}z_2-R\mathfrak{r}z_3)}{dt} \quad \dots \quad \dots : \tag{1}$$

donde, invocando le (2), (3) del § 1, ** si ricava per espressione delle componenti dello stesso momento, secondo la terna degli assi formata cogli assi principali d'inerzia nel polo:

$$-P\frac{d\mathfrak{p}}{dt}+(Q-R)\mathfrak{q}\mathfrak{r} \quad \dots \quad \dots , \tag{2}$$

Assunto poi come polo il centro di massa, dalle identità

$$\int_{\tau} k\left[(y-b)\frac{d^2(z-c)}{dt^2}-(z-c)\frac{d^2(y-b)}{dt^2}\right]d\tau =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} k\left[(y-b)\frac{d(z-c)}{dt}-(z-c)\frac{d(y-b)}{dt}\right]d\tau \text{ ecc.}$$

* *Meccanica*, § 376.
** Cfr. *Meccanica*, § 350.

si ricava, indicando, al solito, le coordinate del centro di massa con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$,

$$\int_\tau k\left[(y-\bar{y})\frac{d^2 z}{dt^2}-(z-\bar{z})\frac{d^2 y}{dt^2}\right]d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_\tau k\left[(y-\bar{y})\frac{d(z-\bar{z})}{dt}-(z-\bar{z})\frac{d(y-\bar{y})}{dt}\right]d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_\tau k\left[(\bar{y}-y)\frac{dz}{dt}-(z-\bar{z})\frac{dy}{dt}\right]d\tau \text{ ecc.} \qquad \text{(cfr. § 9).}$$

Quindi la suddetta relazione si verifica, in questo caso, ancor che il polo non sia fisso, e sta egualmente per la quantità di moto areale competente al movimento assoluto e al movimento relativo al centro di massa; donde segue che il momento delle forze d'inerzia rispetto al centro di massa come polo si potrà rappresentare colle (1) o colle (2), inteso che gli elementi d'inerzia che vi figurano si riferiscano al centro di massa medesimo.

§ 11. — Infine, introducendo le (5″) del § 1 in

$$\int_\tau k\left(Xu+Yv+Zw\right)d\tau,$$

espressione della misura della potenza delle forze (X, Y, Z) applicate al mobile corrispondente all'atto di movimento (u, v, w), otteniamo

$$\mathrm{X}\,l+\mathrm{Y}\,m+\mathrm{Z}\,n+\mathrm{L}\,p+\mathrm{M}\,q+\mathrm{N}\,r \tag{1}$$

posto

$$\left.\begin{array}{lll}\mathrm{X}=\int_\tau kX\,d\tau, & \mathrm{Y}=\int_\tau kY\,d\tau, & \mathrm{Z}=\int_\tau kZ\,d\tau \\ \mathrm{L}=\int_\tau k(yZ-zY)d\tau, & \mathrm{M}=\int_\tau k(zX-xZ)d\tau, & \mathrm{N}=\int_\tau k(xY-yX)d\tau\end{array}\right\}(2)$$

per modo che X, Y, Z e L, M, N rappresentano rispettivamente le

componenti del risultante delle forze in discorso, e del momento delle medesime rispetto al punto preso per origine, come polo *.

Donde s'inferisce immediatamente, poichè questo punto, in cui, al supposto istante, la velocità è (l, m, n), rappresenta un punto qualsivoglia, l'espressione

$$X u + Y v + Z w + L p + M q + N r,$$

dove L, M, N indicano ora le componenti del suddetto momento rispetto ad un punto dove la velocità allo stesso istante è (u, v, w), qualunque esso sia (cfr. § 1: *Osservazione*).

Distinzioni ed ipotesi fondamentali relative ai vincoli di un sistema di corpi rigidi.

§ 12. — Sistema di corpi rigidi si chiama un mobile, che può decomporsi in un certo numero di parti, ciascuna delle quali è assoggettata al vincolo della rigidità, e con questo si dice un corpo rigido, o solido, o anche un pezzo rigido o solido del sistema.

§ 13. — Se non s'aggiunge altra condizione che limiti direttamente *a priori* l'atto di movimento, in tutto il considerato intervallo di tempo, il sistema si chiama libero, e diversamente vincolato.

Ora, la specie di queste condizioni — dette vincoli del sistema — si può distinguere, in primo luogo, col criterio che, per definire il vincolo, sia sufficiente qualificare le posizioni assumibili dal mobile — diverse, se occorre, ai diversi istanti — oppure che sia indispensabile riferirsi ad un movimento — cioè ad una successione continua di posizioni, corrispondente alla successione dei valori di un parametro — che comincia con un istante qualsivoglia. Il vincolo si dice, nei due casi, rispettivamente di prima e di seconda specie. Un corpo rigido un cui punto è vincolato a possedere un movimento prestabilito, op-

* *Meccanica*, § 341.

pure un corpo rigido vincolato a rotolare sopra un piano in movimento prestabilito sono esempii di vincoli di prima specie: un corpo rigido vincolato a rotolare senza strisciare — cioè in modo che sia nulla ad ogni istante la velocità del punto del corpo che funge momentaneamente da punto di contatto — è un esempio di vincolo di seconda specie.

Un'altra distinzione dei vincoli si fonda sulla circostanza che le posizioni assumibili dal mobile conformemente al vincolo, o il movimento mediante il quale il vincolo si definisce, siano invariabili o no col tempo. Nei due casi, rispettivamente, il vincolo si dice indipendente e dipendente dal tempo. Un corpo rigido un cui punto è fisso, oppure un corpo rigido vincolato a rotolare, o a rotolare senza strisciare, sopra un piano fisso, sono esempii di vincoli indipendenti dal tempo: che se il punto o il piano si suppongono, anzi che fissi, in movimento prestabilito, si hanno invece esempii di vincoli dipendenti dal tempo.

§ 14. — Coordinate normali di un corpo rigido chiameremo le coordinate α, β, γ dell'origine, e gli angoli di direzione (di Kirchhoff) φ, f, θ di una terna d'assi ortogonali invariabilmente connessa col corpo — sestupla di parametri atta a individuare la posizione del corpo medesimo (§§ 1, 3): e coordinate normali di un sistema di corpi rigidi, l'insieme delle coordinate normali dei pezzi rigidi che lo compongono. Designeremo le coordinate normali di un sistema con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$: per modo che ν sarà sestuplo del numero dei corpi componenti il sistema.

Stabilite le $\mu < \nu$ equazioni

$$E_i(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu, t) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

o, scrivendo più concisamente,

$$E_i(\xi, t) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \tag{1}$$

dove le $E_i(\xi, t)$ si suppongono funzioni regolari delle relative variabili, e tali, inoltre, che non sia nullo il determinante funzionale di esse per rispetto a μ delle ξ, se occorre, opportunamente scelte, ne verrà pel sistema un vincolo della prima specie. Difatti, attribuito a t un valor particolare $\bar{t}$ qualsivoglia, ogni insieme di valori $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, formato, stabilendone $\nu - \mu$ a piacere, e determinando i rimanenti μ colle precedenti equazioni,

in cui si sia posto $t = \bar{t}$, definisce una posizione attribuibile al sistema al tempo $\bar{t}$, e la totalità di questi insieme, la totalità delle posizioni medesime. Con questo, il vincolo stabilito dalle (1) si traduce semplicemente nelle posizioni assumibili dal sistema ad ogni istante.

Ne viene che, con siffatto sistema di equazioni fra le coordinate e il tempo, *non* si potrà rappresentare un vincolo della seconda specie.

Però, in ambedue i casi, potrà il vincolo essere rappresentato da un sistema di equazioni ai differenziali totali nelle variabili ξ e t, come

$$\Sigma\, \Xi_i\, d\,\xi = T_i\, d\,t\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \qquad (2)$$

dove la sommatoria è estesa agl'indici sottintesi delle ξ, e le Ξ_i, T_i sono, in generale, funzioni regolari delle ξ e di t, colla condizione che μ sia la caratteristica della matrice delle Ξ_i, vale a dire che se ne possa estrarre almeno un determinante di ordine μ diverso da o, con che μ delle $\frac{d\,\xi}{d\,t}$ potranno ricavarsi dalle (2), espresse per funzioni lineari delle $\nu - \mu$ rimanenti.

Difatti, dalle (1) si ricava, differenziando,

$$\Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi}\, d\,\xi + \frac{\partial E_i}{\partial t}\, d\,t = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \qquad (3)$$

e da queste si risale, integrando, alle (1).

Notiamo che, perchè il vincolo riesca dalle (3) egualmente definito come dalle (1), occorrerà l'aggiunta dei valori delle ξ per un valore di t.

Ora noi stabiliamo il canone che « i vincoli imposti ai mobili da noi considerati saranno sempre traducibili con un sistema di equazioni ai differenziali totali del tipo (2) ».

Questo sistema di equazioni potrà riuscire (illimitatamente) integrabile o no. Nei due casi rispettivamente il mobile si dirà un sistema olonomo o anolonomo *.

---

* Il termine olonomo, introdotto da Hertz — *Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt* (1894) — da ὅλος, intero, e νόμος, legge, è inteso esprimere appunto che i vincoli si traducono in equazioni finite.

Si dirà poi il vincolo indipendente dal tempo, quando nelle equazioni (2), che lo rappresentano, le Ξ_i non contengono t, e $T_i = 0$, per modo che neppure vi figura dt. Quando il sistema sia olonomo, ciò torna supporre che il tempo t non figuri esplicitamente nelle equazioni (1). Diversamente il vincolo si dirà dipendente dal tempo.

Alle equazioni (2) si può dare un'altra forma, sotto la quale giova ordinariamente considerarle.

Concepiamo dalle (6') del § 1 e dalle (2) del § 3 ricavate

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{df}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}$$

in funzione di l, m, n, p, q, r.

Esse ne risulteranno funzioni lineari omogenee intere: introducendo le quali nelle (2), queste si trasformeranno in un sistema composto di un egual numero di equazioni lineari, generalmente non omogenee, in l, m, n, p, q, r, per tutti i solidi componenti il mobile considerato:

$$\Sigma (L_i l + M_i m + N_i n + P_i p + Q_i q + R_i r) = T_i, \qquad (4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

dove la sommatoria è estesa ai singoli solidi, e le L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i sono, in generale, funzioni regolari delle ξ e di t (formate, se occorre, coll'intervento di a, b, c, che, se non sono costanti, s'intenderanno funzioni *note* dalle stesse variabili), tali che μ è la caratteristica della loro matrice, per modo che le stesse equazioni sono atte a fornire μ delle l, m, n, p, q, r, relative a tutti i solidi, espresse per funzioni lineari omogenee intere delle rimanenti $\nu - \mu$. Che se i vincoli sono indipendenti dal tempo, sarà $T_i = 0$, ed escluso che a, b, c involgano il tempo esplicito, neppure lo conterranno $L_i, \ldots P_i, \ldots$.

Reciprocamente, ogni sistema (4) si riduce, colla sostituzione inversa, alla forma (2): e se $T_i = 0$, $L_i, \ldots P_i, \ldots$ non involgono il tempo esplicito, quelle equazioni ricevono la qualità propria dei vincoli indipendenti dal tempo.

Osservazione. — Notiamo il caso che (a, b, c) rappresenti, al variar del tempo, un punto che si mantiene invariabilmente unito col relativo solido, nel quale, valendoci, secondo la con-

venzione (§ 1), dei simboli α, β, γ invece di a, b, c, si verificheranno senz'altro le (6) del § 1:

$$l=\frac{d\alpha}{dt}, \qquad m=\frac{d\beta}{dt}, \qquad n=\frac{d\gamma}{dt}.$$

Esempii.

§ 15. — I. *Corpo rigido un cui punto determinato è vincolato a possedere un movimento prestabilito.*

Indichino $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*$ le coordinate del punto vincolato per rispetto alla terna degli assi connessa col mobile, e x^*, y^*, z^* le coordinate dello stesso punto per rispetto alla terna degli assi fissi. Quelle saranno tre costanti date, e queste tre funzioni date del tempo.

Il vincolo, per (1) del § 1, sarà quindi rappresentato da

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\alpha_1\,\mathfrak{x}^*+\alpha_2\,\mathfrak{y}^*+\alpha_3\,\mathfrak{z}^* &= x^* \\ \beta+\beta_1\,\mathfrak{x}^*+\beta_2\,\mathfrak{y}^*+\beta_3\,\mathfrak{z}^* &= y^* \\ \gamma+\gamma_1\,\mathfrak{x}^*+\gamma_2\,\mathfrak{y}^*+\gamma_3\,\mathfrak{z}^* &= z^* \end{aligned}\right\}(1)$$

le quali — ricordando le (1) del § 3 — sono tre equazioni del tipo (1) del § 14.

Consideriamo ora le equazioni che si ricavano dalle precedenti colla derivazione dei due membri rispetto a t: alle quali s'intende aggiunta la condizione che, per un certo valore del tempo, siano dati i valori di x^*, y^*, z^*, per modo che esse riescano equivalenti alle (1).

Otteniamo, valendoci delle (4) del § 1 (conformemente alle (7) dello stesso paragrafo), e delle (1),

$$\left.\begin{aligned} l+q\,(z^*-\gamma)-r\,(y^*-\beta) &= \dot{x}^* \\ m+r\,(x^*-\alpha)-p\,(z^*-\gamma) &= \dot{y}^* \\ n+p\,(y^*-\beta)-q\,(x^*-\alpha) &= \dot{z}^* \end{aligned}\right\}(2)$$

(dove il punto sovrapposto indica la derivata rispetto a t): le quali relazioni esprimono, per le (7) del § 1, ch'è prestabilita la velocità del punto le cui coordinate rispetto agli assi fissi sono x^*, y^*, z^*.

Queste sono equazioni del tipo (4), o (2), del § 14: di cui (1) rappresentano gl'integrali.

Il sistema è olonomo; il vincolo dipendente dal tempo: salvo il caso che le x^*, y^*, z^* si riducano a costanti — cioè che il punto vincolato sia fisso.

Osserviamo, infine, che le (2), poste sotto la forma

$$
\begin{aligned}
l + q(z^* - \gamma) - r(y^* - \beta) - \dot{x}^* &= 0 \\
m + r(x^* - \alpha) - p(z^* - \gamma) - \dot{y}^* &= 0 \\
n + p(y^* - \beta) - q(x^* - \alpha) - \dot{z}^* &= 0,
\end{aligned}
$$

esprimono che, ad ogni istante, è nulla la velocità del punto (x^*, y^*, z^*) nel movimento del solido relativo ad una terna d'assi paralleli agli assi fissi, e aventi per origine il punto medesimo, o ai quali, più generalmente, questo punto sia invariabilmente unito *.

§ 16. — II. *Corpo rigido un cui punto determinato è vincolato a mantenersi sopra una superficie in movimento prestabilito.*

Sia

$$F(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

l'equazione della superficie al tempo t, e indichino x^*, y^*, z^* le coordinate del punto vincolato allo stesso tempo. Sarà

$$F(x^*, y^*, z^*, t) = 0 : \tag{2}$$

cui vanno aggiunte

$$
\begin{aligned}
x^* &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x}^* + \alpha_2 \mathfrak{y}^* + \alpha_3 \mathfrak{z}^* \\
y^* &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x}^* + \beta_2 \mathfrak{y}^* + \beta_3 \mathfrak{z}^* \\
z^* &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x}^* + \gamma_2 \mathfrak{y}^* + \gamma_3 \mathfrak{z}^*
\end{aligned}
$$

dove le $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*$, coordinate del punto vincolato rispetto alla terna mobile, sono costanti date.

Così l'equazione (2) riesce del tipo (1) del § 14.

---

* Cfr. *Meccanica*, § 175.

L'equazione che se ne deduce colla derivazione è

$$\frac{\partial F}{\partial x^*}\frac{dx^*}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y^*}\frac{dy^*}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z^*}\frac{dz^*}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0, \qquad (3)$$

dove, conformemente alle (7) del § 1,

$$\frac{dx^*}{dt}=l+q(z^*-\gamma)-r(y^*-\beta)$$

$$\frac{dy^*}{dt}=m+r(x^*-\alpha)-p(z^*-\gamma)$$

$$\frac{dz^*}{dt}=n+p(y^*-\beta)-q(x^*-\alpha);$$

equazione del tipo (4), o (2), del § 14, da cui, integrando, e aggiungendovi la condizione che la (2) sia soddisfatta pei valori di t, x^*, y^*, z^* relativi ad un determinato istante, si risale alla stessa (2).

Posto

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2=\Delta_1 F,$$

l'equazione (3) assegna alla componente della velocità del punto vincolato, ad ogni istante, secondo la normale presa in un certo senso, alla superficie mobile, nella posizione che le compete allo stesso istante, in questo punto, il valore rappresentato da

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\Delta_1 F}}:$$

rapporto indipendente dalla forma del primo membro dell'equazione (1), colla quale è rappresentata la superficie.

Se F non dipende esplicitamente dal tempo t, come se la superficie è fissa, questo rapporto è nullo, e la precedente equazione esprime semplicemente che la velocità del punto vincolato, ad ogni istante, è parallela al pian tangente alla superficie, nel posto di esso punto al medesimo istante.

Diversamente, questa proprietà compete al movimento relativo ad una terna d'assi mobili, tale che

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\Delta_1 F}}$$

rappresenti la componente della velocità di trascinamento del punto al tempo t, secondo il suddetto asse normale alla superficie, nel posto del punto allo stesso tempo *.

Supposta la superficie un piano, per modo che (1) sia

$$A x + B y + C z + D = 0, \qquad (1')$$

dove supporremo, ciò ch'è sempre lecito,

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

si ha, preso $\sqrt{\Delta_1 F} = 1$,

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\Delta_1 F}} = -(\dot{A} x^* + \dot{B} y^* + \dot{C} z^* + \dot{D}). \qquad (3')$$

D'altra parte,

$$P = A x + B y + C z + D$$

rappresenta la coordinata del punto (x, y, z) rispetto all'asse definito dalla perpendicolare innalzata da un punto qualunque del piano (1'), col senso determinato da A, B, C. Quindi

$$\dot{A} x^* + \dot{B} y^* + \dot{C} z^* + \dot{D}$$

non è altro che la componente secondo questo asse della velocità del punto (x^*, y^*, z^*), concepito come invariabilmente unito agli assi fissi, nel movimento di questi assi relativo ad una terna d'assi fissi al piano, e la stessa espressione col segno cambiato,

* *Meccanica*, § 175.

la componente secondo l'asse medesimo della velocità di detto punto, concepito invece come invariabilmente unito al piano.

Donde, per (3'), si conclude che è nulla la componente della velocità secondo un asse normale al piano, nel movimento del punto relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al piano: cioè la velocità di questo movimento relativo è, ad ogni istante, parallela al piano.

Supposto il piano fisso, e, come si suole, il punto vincolato del solido un punto conico del contorno, questo è il caso del movimento della trottola.

La superficie sia, in secondo luogo, una superficie sferica mobile e di raggio variabile, per modo che (1) diventi

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2.$$

Preso $\sqrt{\Delta_1 F}=d>0$, ne viene

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\Delta_1 F}}=\dot{a}\frac{x^*-a}{d}+\dot{b}\frac{y^*-b}{d}+\dot{c}\frac{z^*-c}{d}+\dot{d}:$$

che è la componente della velocità del punto appartenente alla superficie sferica in cui cade, al tempo t, il punto vincolato, secondo il raggio spiccato dal centro al punto medesimo.

Se la superficie sferica è fissa, questo è il caso del movimento di un solido riunito ad un punto fisso mediante una verghetta o un filo teso.

§ 17. — III. *Corpo rigido una cui retta determinata è vincolata a possedere un movimento prestabilito.*

Siano $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{y}^*$, $\mathfrak{z}^*$, e $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ le coordinate di un punto della retta e (con un certo senso) i suoi coseni di direzione, per rispetto alla terna connessa col mobile, per modo che riescano altrettante costanti. Avremo

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\alpha_1\mathfrak{x}^*+\alpha_2\mathfrak{y}^*+\alpha_3\mathfrak{z}^*&=x^*\\ \beta+\beta_1\mathfrak{x}^*+\beta_2\mathfrak{y}^*+\beta_3\mathfrak{z}^*&=y^*\\ \gamma+\gamma_1\mathfrak{x}^*+\gamma_2\mathfrak{y}^*+\gamma_3\mathfrak{z}^*&=z^*\\ \mathfrak{a}\,\alpha_1+\mathfrak{b}\,\alpha_2+\mathfrak{c}\,\alpha_3&=A\\ \mathfrak{a}\,\beta_1+\mathfrak{b}\,\beta_2+\mathfrak{c}\,\beta_3&=B\\ \mathfrak{a}\,\gamma_1+\mathfrak{b}\,\gamma_2+\mathfrak{c}\,\gamma_3&=C\end{aligned}\right\}(1)$$

dove $x^*, y^*, z^*, A, B, C,$ rappresentano altrettante funzioni note del tempo t.

Le quali sono sei equazioni del tipo (1) del § 14, che si riducono a cinque, in virtù di

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Consideriamo poi le equazioni che se ne ricavano colla derivazione, alle quali s'intende aggiunta la condizione che, per un certo valore del tempo, sono dati i valori di $z^* y^* x^* A, B, C,$ cioè fissata la posizione della retta, per modo che riescano una condizione equivalente alle (1).

Dalle prime tre scaturiscono

$$\left.\begin{aligned} l + q(z^* - \gamma) - r(y^* - \beta) &= \dot{x}^* \\ m + r(x^* - \alpha) - p(z^* - \gamma) &= \dot{y}^* \\ n + p(y^* - \beta) - q(x^* - \alpha) &= \dot{z}^* \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

come nel § 15, delle quali abbiamo visto il significato, che è di prestabilire la velocità del punto (x^*, y^*, z^*).

Poniamo in seguito

$$\frac{dA}{dt} = \varkappa C - \rho B, \quad \frac{dB}{dt} = \rho A - \varpi C, \quad \frac{dC}{dt} = \varpi B - \varkappa A$$
$$\varpi A + \varkappa B + \rho C = 0.$$

Queste equazioni, come subito si riconosce, applicando i criterii generali, determinano $\varpi, \varkappa, \rho$ univocamente: e il loro significato, confrontando le tre prime colle (4) del § 1, e tenendo conto della quarta, riesce quello di componenti secondo gli assi fissi della componente della velocità angolare di una terna d'assi a cui la retta è invariabilmente unita, secondo un piano perpendicolare alla retta medesima.

La seconda terna delle (1) ci fornisce, valendosi delle suddette formole di Poisson, e introducendo infine le espressioni di A, B, C date dalla terna stessa

$$\frac{p - \varpi}{A} = \frac{q - \varkappa}{B} = \frac{r - \rho}{C}: \quad (3)$$

esprimenti che la velocità angolare del solido, nel suo movimento relativo ad una terna d'assi a cui la retta vincolata è invariabilmente unita, o sarà nulla — ch'è il caso di una terna a cui è invariabilmente unito lo stesso solido — o avrà, ad ogni istante, la prestabilita direzione della retta — come conviene ad un movimento rotatorio intorno ad essa. Occorre appena avvertire che si può fissare, indipendentemente dalle (1), la componente della velocità angolare di questa terna d'assi, secondo la retta vincolata: che se questa componente si suppone nulla, la loro velocità angolare riesce $(\varpi, \varkappa, \rho)$.

Le (2) e (3) sono equazioni del tipo (4) o (2) del § 14: e le (1) ne rappresentano il sistema integrale.

Questo è quindi un altro esempio di sistema olonomo. Oltre di che i vincoli sono indipendenti dal tempo, salvo il caso che le x^*, y^*, z^*, A, B, C si riducano a costanti, ciò che si verifica nel caso della retta fissa.

§ 18. — IV. *Corpo rigido vincolato a strisciare senza rotolare sopra un piano il cui movimento è prestabilito.*

S'intende con questo che un corpo rigido si mantenga tangente ad un piano, il cui movimento è prestabilito, mediante un punto determinato del suo contorno.

Sia

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

dove

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \tag{2}$$

l'equazione del piano rispetto agli assi fissi, e

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0 \tag{3}$$

l'equazione del contorno del solido rispetto agli assi mobili, invariabilmente uniti al solido medesimo. Indichino $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*$, costanti date, e x^*, y^*, z^* le coordinate del punto vincolato rispetto agli assi mobili e fissi rispettivamente, per modo che, col solito significato dei simboli,

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x}^* + \alpha_2 \mathfrak{y}^* + \alpha_3 \mathfrak{z}^* \\ y^* &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x}^* + \beta_2 \mathfrak{y}^* + \beta_3 \mathfrak{z}^* \\ z^* &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x}^* + \gamma_2 \mathfrak{y}^* + \gamma_3 \mathfrak{z}^*. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Avremo

$$A x^* + B y^* + C z^* + D = 0. \tag{5}$$

$$\frac{A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1}{\dfrac{\partial F}{\partial x^*}} = \frac{A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2}{\dfrac{\partial F}{\partial y^*}} = \frac{A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3}{\dfrac{\partial F}{\partial z^*}} \tag{6}$$

dove si devono introdurre le (4). Con che otteniamo tre equazioni tra le coordinate normali α, β, γ, φ, f, θ e il tempo t: vale a dire tre equazioni del tipo (1) del § 14.

Consideriamo, anche in questo caso, le equazioni che si ricavano da (5) e (6), derivandole per rispetto al tempo: alle quali intenderemo aggiunta la condizione che le stesse (5), (6) si verifichino ad un istante, affinchè risultino equivalenti a queste.

La (5) ci fornisce

$$A\frac{d x^*}{d t} + B\frac{d y^*}{d t} + C\frac{d z^*}{d t} = -(\dot{A} x^* + \dot{B} y^* + \dot{C} z^* + \dot{D}). \tag{7}$$

La quale, rammentando il significato del secondo membro stabilito nel § 16, esprime che, ad ogni istante, è eguale la componente, secondo un asse perpendicolare al piano, della velocità del punto vincolato del solido e del punto del piano che, allo stesso istante, funge da punto di contatto.

Poniamo poi, inteso che si verifichi (2), con che A, B, C rappresentano i coseni di direzione della normale al piano, presa in un certo senso,

$$\frac{d A}{d t} = \varkappa C - \rho B, \quad \frac{d B}{d t} = \rho A - \varpi C, \quad \frac{d C}{d t} = \varpi B - \varkappa A$$

$$\varpi A + \varkappa B + \rho C = 0;$$

mediante le quali equazioni ϖ, $\varkappa$, ρ riescono univocamente determinate (cfr. § 17), e rappresentano le componenti secondo gli assi fissi della componente della velocità angolare di una terna d' assi invariabilmente unita al piano, secondo il piano medesimo.

Derivando (6), troviamo due equazioni analoghe fra loro, esprimenti l'eguaglianza di tre rapporti, di cui il primo è

$$\frac{A\frac{d\alpha_1}{dt}+B\frac{d\beta_1}{dt}+C\frac{d\gamma_1}{dt}+\dot{A}\alpha_1+\dot{B}\beta_1+\dot{C}\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial \xi^*}}$$

e gli altri se ne deducono colle note sostituzioni.

Ora, se nel suddetto rapporto si introducono le precedenti relazioni, esso si riduce a

$$\frac{\big(B(r-\rho)-C(q-\varkappa)\big)\alpha_1+\big(C(p-\varpi)-A(r-\rho)\big)\beta_1+\big(A(q-\varkappa)-B(p-\varpi)\big)\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial \xi^*}},$$

per modo che le due equazioni dedotte colla derivazione — vale a dire le equazioni del tipo (4) del § 14 — risultano anche espresse dall'eguaglianza dei tre rapporti, di cui il primo è

$$\frac{B(r-\rho)-C(q-\varkappa)}{\frac{\partial F}{\partial \xi^*}\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial \eta^*}\alpha_2+\frac{\partial F}{\partial \zeta^*}\alpha_3}.$$

Ammessa la indicata condizione iniziale, colla quale, e le equazioni in discorso, si hanno le (6), i denominatori, in virtù di quest'ultime, sono proporzionali a A, B, C, e le equazioni trovate si riducono a

$$\frac{p-\varpi}{A}=\frac{q-\varkappa}{B}=\frac{r-\rho}{C}:$$

esprimenti che, ad ogni istante, la velocità angolare del movimento del solido relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al piano o è nulla — caso che la terna sia invariabilmente uniti allo stesso solido — o perpendicolare al piano. Al qual proposito, facciamo l'osservazione, analoga a quella del § 17, che manifestamente si può fissare a piacere, indipendentemente dalle

condizioni (1) e (6), la componente della velocità della terna suddetta secondo un asse perpendicolare al piano: che se questa si suppone nulla, $(\varpi, \varkappa, \rho)$ rappresenta senz'altro la velocità angolare della terna.

Così, abbiamo di nuovo un esempio di sistema olonomo, e di vincolo dipendente dal tempo, salvo il caso che A, B, C, D, siano costanti, il quale si verifica se il piano è fisso. In tal caso gioverà supporre coincidente con esso piano il piano xy, e le equazioni (5) e (6) si ridurranno a

$$\gamma + \gamma_1 \mathfrak{x}^* + \gamma_2 \mathfrak{y}^* + \gamma_3 \mathfrak{z}^* = 0$$

$$\frac{\gamma_1}{\dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}^*}} = \frac{\gamma_2}{\dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}^*}} = \frac{\gamma_3}{\dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}^*}} :$$

mentre per forma differenziale delle stesse equazioni si ha

$$n = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0,$$

alle quali vanno aggiunte le condizioni che, ad un istante, il contorno del solido abbia un punto comune col piano xy, nel quale la normale sia parallela all'asse delle z, conformemente alle equazioni finite che precedono.

§ 19. — V. *Corpo rigido vincolato a rotolare, senza restrizioni relative allo strisciamento, sopra un piano il cui movimento è prestabilito.*

S'intende con questo che un corpo rigido, il cui contorno supponiamo tutto convesso, sia semplicemente vincolato a mantenersi tangente ad un piano il cui movimento è prestabilito.

Mantenendo ai simboli adoperati nel paragrafo precedente lo stesso significato, stanno le equazioni (4), (5) e (6) del paragrafo medesimo: con questa differenza che $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*$ non rappresentano più date costanti, ma tre valori variabili, come x^*, y^*, z^*, per determinare i quali in funzione di $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, $(s = 1, 2, 3)$, ossia di φ, f, θ, e del tempo t, servono le (6), coll'aggiunta, conformemente a (3), di

$$F(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*) = 0. \qquad (1)$$

Così le (6) cessano di contare tra le equazioni stabilite fra le coordinate e il tempo, secondo il tipo (1) del § 14, ed equazione di questa specie, che traduce il vincolo nel caso in discorso, resta la (5), cioè

$$A x^* + B y^* + C z^* + D = 0, \tag{2}$$

donde, mediante le (4), le (6) e (1) si devono intendere eliminate $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*$, per introdurvi $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, f, \theta$ e t.

Consideriamo, come nei precedenti casi, l'equazione che si ricava da questa, derivando rispetto al tempo, colla solita condizione che questa si verifichi ad un istante, per modo che le due equazioni riescano equivalenti.

Si ottiene

$$A\frac{dx^*}{dt} + B\frac{dy^*}{dt} + C\frac{dz^*}{dt} = -(\dot{A}x^* + \dot{B}y^* + \dot{C}z^* + \dot{D}). \tag{3}$$

Ivi il secondo membro ha lo stesso significato come nel caso precedente. Per quanto al primo, nel presente caso, si ha, derivando le (4) del paragrafo precedente, e valendosi delle solite relazioni,

$$\frac{dx^*}{dt} = l + q(z^* - \gamma) - r(y^* - \beta) + \alpha_1\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} + \alpha_2\frac{d\mathfrak{y}^*}{dt} + \alpha_3\frac{d\mathfrak{z}^*}{dt},$$

e le formole analoghe. D'altra parte, per le ultime due delle (6) dello stesso precedente paragrafo, si ha

$$A\left(\alpha_1\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} + \alpha_2\frac{d\mathfrak{y}^*}{dt} + \alpha_3\frac{d\mathfrak{z}^*}{dt}\right) + B\left(\beta_1\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} + \beta_2\frac{d\mathfrak{y}^*}{dt} + \beta_3\frac{d\mathfrak{z}^*}{dt}\right) +$$

$$+ C\left(\gamma_1\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} + \gamma_2\frac{d\mathfrak{y}^*}{dt} + \gamma_3\frac{d\mathfrak{z}^*}{dt}\right)$$

$$= K\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}^*}\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}^*}\frac{d\mathfrak{y}^*}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}^*}\frac{d\mathfrak{z}^*}{dt}\right),$$

dove K è un fattore di proporzionalità, che non importa pre-

cisare, e il secondo fattore per (1) è zero. Per modo che il primo membro si riduce a

$$A\left(l+q(z^*-\gamma)-r(y^*-\beta)\right)+B\left(m+r(x^*-\alpha)-p(z^*-\gamma)\right)+$$
$$+C\left(n+p(y^*-\beta)-q(x^*-\alpha)\right),$$

e conserva pure il significato dell'esempio precedente.

Ne viene che (3), tenuto calcolo della condizione che si verifichi (2) ad un istante, esprime che, ad ogni istante, è eguale la componente, secondo un asse perpendicolare al piano, della velocità del punto del contorno del solido e del punto del piano, ambedue variabili, in cui, al supposto istante, si toccano le due superficie.

Così abbiamo un quinto esempio di sistema olonomo, il cui vincolo è espresso, in forma differenziale, da (3), e, in forma finita, da (2), che ne rappresenta l'integrale.

Il vincolo è poi dipendente dal tempo, salvo il caso che A, B, C, D rappresentino altrettante costanti, il quale si verifica se il piano è fisso.

In quest'ultimo caso converrà assumere il piano per piano xy, con che riuscendo

$$z=0$$

l'equazione di detto piano, si ha per equazione in termini finiti

$$\gamma+\gamma_1 x^*+\gamma_2 y^*+\gamma_3 z^*=0, \tag{4}$$

alla quale vanno aggiunte la (1), le prime due delle (4) del paragrafo precedente, e

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^*}}{\gamma_1}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y^*}}{\gamma_2}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z^*}}{\gamma_3}.$$

Mentre l'equazione differenziale riesce

$$n+p(y^*-\beta)-q(x^*-\alpha)=0: \tag{5}$$

alla quale vanno aggiunte le stesse equazioni, e la condizione che, ad un istante, si verifichi (4), cioè che abbiano un punto comune il piano e il contorno del solido.

§ 20. — VI. *Corpo rigido vincolato a rotolare senza strisciare sopra un piano il cui movimento è prestabilito.*

S'intende con questo che un corpo rigido, il cui contorno è tutto convesso, si mantenga costantemente tangente ad un piano, in movimento prestabilito, e sia costantemente eguale la velocità del punto del contorno e del punto del piano che fungono, ad un istante, da punto di contatto delle due superficie.

Questo vincolo si traduce nelle equazioni

$$\left.\begin{aligned} l + q(z^* - \gamma) - r(y^* - \beta) &= \lambda + \varkappa z^* - \rho y^* \\ m + r(x^* - \alpha) - p(z^* - \gamma) &= \mu + \rho x^* - \varpi z^* \\ n + p(y^* - \beta) - q(x^* - \alpha) &= \nu + \varpi y^* - \varkappa x^* , \end{aligned}\right\} (1)$$

dove $\lambda, \mu, \nu, \varpi, \varkappa, \rho$ rappresentano funzioni date dal tempo t, e, inteso che i simboli adoperati nei paragrafi precedenti conservino il medesimo significato, debbono verificarsi (1) del § 19, (6) e (4) del § 18, e, ad un istante, (5) dello stesso § 18. Ciò che scaturisce immediatamente dalla definizione del vincolo, e da quanto si è riscontrato nel precedente esempio sull'equivalenza tra la forma finita dell' equazione traducente il vincolo e la forma differenziale completata dalla condizione iniziale indicata.

Eliminate x^*, y^*, z^* mediante le ricordate relazioni, e poste per p, q, r le espressioni (1) del § 3, le (1) si riducono ad un sistema di tre equazioni ai differenziali totali nelle variabili $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, f, \theta$ e t, che si dimostra non essere (illimitatamente) integrabile.

Questo è quindi un esempio di sistema anolonomo. Come si può rilevare, senz'altro, dalla circostanza che l'eguaglianza della velocità dei due punti del contorno del solido e del piano, che, ad un istante, fungono da comune punto di contatto delle due superficie, richiede necessariamente la considerazione di un movimento del solido, che comprende la sua posizione a quell'istante.

Il vincolo in discorso è poi dipendente dal tempo, salvo il caso che sia $\lambda = \mu = \nu = \varpi = \varkappa = \rho = 0$. Questo si verifica nel caso del solido vincolato a rotolare sopra un piano fisso, colla condizione che, ad ogni istante, sia nulla la velocità del punto del contorno che, allo stesso istante, funge da punto di contatto col piano.

Gradi di libertà - Coordinate libere di un sistema olonomo.

§ 21. — La differenza fra il numero delle coordinate normali di un sistema mobile e quello delle equazioni traducenti i vincoli (§ 14) si chiama il numero dei « gradi di libertà » del sistema.

Nell'ipotesi che il sistema sia olonomo, cioè che i vincoli si possano tradurre mediante μ equazioni fra le coordinate normali e il tempo (le equazioni (1) del § 14), stando le indicate condizioni, si potranno concepire μ di dette coordinate espresse in funzione delle $\nu - \mu$ rimanenti, se occorre, opportunamente scelte, e del tempo t: e il complesso dei sistemi di valori, liberamente assegnati, di queste $\nu - \mu$ coordinate, combinati coi singoli valori del tempo t, rappresenterà tutte e sole le posizioni assumibili dal mobile, conformemente ai vincoli, ai corrispondenti istanti. Più generalmente, potremo concepire le ν coordinate normali espresse per mezzo di $\nu - \mu$ parametri — vale a dire di tanti parametri quanto sono i gradi di libertà del sistema, aventi questa proprietà. Ogni così fatta specie di parametri si chiama un sistema di « coordinate libere » del mobile considerato.

Nell'esempio I (§ 15) abbiamo tre gradi di libertà: e coordinate libere, ad ogni istante, sono gli angoli di direzione di una terna d'assi coordinati fissa al solido, coll'origine nel punto vincolato, al posto che gli compete al considerato istante.

Nell'esempio II (§ 16) vi sono cinque gradi di libertà: e coordinate libere sono le coordinate del punto della superficie, presa nella sua posizione al supposto istante, che funge da posto del punto vincolato del solido, e gli angoli di direzione di una terna d'assi ortogonali fissa al solido, coll'origine nel punto vincolato, al posto che gli compete allo stesso istante.

Nell'esempio III (§ 17) abbiamo un solo grado di libertà: e coordinata libera, ad ogni istante, è l'angolo di rotazione rispetto alla retta vincolata, presa con un certo senso, come asse, nella posizione che le compete al supposto istante.

Nell'esempio IV (§ 18), abbiamo di nuovo tre gradi di libertà: e coordinate libere, ad un istante, sono le coordinate del punto del piano che funge da punto di contatto, e l'angolo che fissa l'azimut del solido intorno alla normale al contorno nel punto vincolato, il piano essendo assunto nella posizione che gli compete al supposto tempo.

Nell'esempio V (§ 19), vi sono cinque gradi di libertà: e coordinate libere, ad ogni istante, sono le coordinate del punto del piano, e le coordinate del punto del contorno, che fungono da punto di contatto, al supposto istante, e l'angolo che determina l'azimut del solido intorno alla normale, come nel caso precedente: inteso parimente che il piano si assuma nella posizione che gli compete all'istante considerato.

Nell'esempio VI, finalmente, (§ 20), vi sono tre gradi di libertà, come nel I e nel IV, ma non vi ha luogo a considerare coordinate libere, essendo il sistema anolonomo.

Definizione dell'atto di movimento virtuale di un sistema di corpi rigidi vincolati, ad un istante.

§ 22. — Il vincolo di un sistema di corpi rigidi essendo rappresentato dalle equazioni (4) del § 14

$$\Sigma (L_i l + M_i m + N_i n + P_i p + Q_i q + R_i r) = T_i, \quad (i = 1, 2, \dots \mu)$$

dove la sommatoria è estesa ai corpi componenti il sistema, « si dirà atto di movimento virtuale, ad un istante qualsivoglia, ogni atto di movimento del sistema stesso, tale che la velocità del punto cui compete a quell'istante il posto (x, y, z) vi abbia per componenti

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= l' + q'(z-c) - r'(y-b) \\ \delta y &= m' + r'(x-a) - p'(z-c) \\ \delta z &= n' + p'(y-b) - q'(x-a), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove l', m', n', p', q', r' sono costanti pel pezzo rigido a cui il punto (x, y, z) è concepito appartenere, e soddisfanno alle equazioni

$$\Sigma(L_i l' + M_i m' + N_i n' + P_i p' + Q_i q' + R_i r') = 0, \quad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

nelle quali L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, conservano il precedente significato, e si deve intendere che t vi riceva il valore corrispondente all'istante considerato ».

Introdotte $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\varphi$, δf, $\delta\theta$ con

$$\begin{aligned}
l' &= \delta\alpha - q'(\gamma - c) + r'(\beta - b) \\
m' &= \delta\beta - r'(\alpha - a) + p'(\gamma - c) \\
n' &= \delta\gamma - p'(\beta - b) + q'(\alpha - a) \\
p' &= -\sin\varphi\,\delta\theta - \cos\varphi\sin\theta\,\delta f \\
q' &= \cos\varphi\,\delta\theta - \sin\varphi\sin\theta\,\delta f \\
r' &= \delta\varphi - \cos\theta\,\delta f
\end{aligned}$$

per modo che quelle variabili, che indicheremo con $\delta\xi$, siano legate colle l', m', n', p', q', r' dalle stesse relazioni che legano le $\frac{d\xi}{dt}$ colle l, m, n, p, q, r, (cfr. §§ 1, 3), la precedente definizione equivale a quest'altra, che il vincolo del sistema considerato essendo rappresentato dal sistema di equazioni

$$\Sigma\,\Xi_i\,d\xi = T_i\,dt,$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu) .$$

dove la sommatoria è estesa agli indici delle ξ, sarà atto di movimento virtuale del sistema, ad un istante qualsivoglia, ogni atto di movimento del sistema medesimo, per cui, $\delta\xi$ rappresentando il corrispondente coefficiente differenziale rispetto al tempo della coordinata normale ξ, si verificano le equazioni

$$\Sigma\,\Xi_i\,\delta\xi = 0, \quad (3)$$

dove Ξ_i ha il significato precedente, e t deve ricevervi il valore corrispondente all'istante considerato *.

* Un movimento a cui compete al tempo t un atto di movimento virtuale relativo a questo tempo, si chiamerà a suo luogo (§ 95) un « movimento virtuale relativo allo stesso tempo ».

In forma più breve, si suol dire che, quando il vincolo è indipendente dal tempo, è atto di movimento virtuale ogni atto di movimento del sistema che obbedisce agli stessi vincoli prestabiliti per l'atto di movimento effettivo ad ogni istante: e quando i vincoli sono dipendenti dal tempo, è atto di movimento virtuale del sistema, ad un istante qualsivoglia, ogni atto di movimento del sistema che obbedisce ai vincoli prestabiliti per l'atto di movimento effettivo « fissati nella loro condizione all'istante considerato ».

§ 23. — Le l', m', n', p', q', r', relative a tutti i pezzi rigidi, che, conformemente alle (1) e (2) del paragrafo precedente, determinano un atto di movimento virtuale, si chiamano i coefficienti di questo atto di movimento virtuale. Essi si possono sempre intendere definiti salvo un fattore di proporzionalità.

Più atti di movimento virtuale appartenenti ad uno stesso mobile si dicono « indipendenti » l'uno dall'altro, quando non si può formare un'equazione lineare omogenea a cui soddisfanno i relativi coefficienti omologhi. Ne viene che, se k atti di movimento virtuale non sono indipendenti, sarà nullo ogni determinante di ordine k, le cui righe, o colonne, siano formate con coefficienti omologhi dei medesimi. Un insieme di tanti atti di movimento virtuale, indipendenti l'un dall'altro, quanti sono i gradi di libertà del sistema, si chiama un sistema fondamentale di atti di movimento virtuale del sistema.

Mostriamo ora come, in infiniti modi, si possa formare un sistema fondamentale di atti di movimento virtuale: poi, come ogni atto di movimento virtuale dello stesso mobile, se non è compreso fra quelli, risulta composto di tutti o parte di essi.

Concepiamo, perciò, conformemente alle (2), rappresentate le singole l', m', n', p', q', r' come funzioni lineari omogenee di $\nu - \mu$ parametri indipendenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{\nu-\mu}$, cioè tanti quanti sono i gradi di libertà del mobile, per modo che

$$l' = \Sigma' \, E_j^{(l')} \varepsilon_j, \quad \dots \quad p' = \Sigma' \, E_j^{(p')} \varepsilon_j, \quad \dots \tag{1}$$

dove la sommatoria si riferisce all'indice j, che riceve i valori $1, 2, \dots \nu - \mu$, e le $E_j^{(l')} \dots E_j^{(p')} \dots$ sono funzioni, in generale, delle coordinate del mobile e del tempo.

Questo è certamente possibile, perchè la caratteristica della matrice dei coefficienti $L_i, \dots P_i, \dots$ $(i = 1, 2, \dots \mu)$ delle (2) del

paragrafo precedente essendo supposta di ordine μ (§ 14), si potrà, almeno in un modo, ricavare dalle stesse equazioni μ delle l', m', n', p', q', r' espresse per funzioni lineari omogenee intere delle rimanenti $\nu - \mu$, che rimangono indipendenti: ed è possibile in infiniti modi, perchè, ottenuta una specie di parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-\mu}$, quale può essere la precedente, se ne ricava un'altra, ed una nuova rappresentazione, eguagliandoli ad altrettante funzioni lineari omogenee intere di un egual numero di nuovi parametri indipendenti.

Ciò premesso, ne viene senz'altro che in infiniti modi si può formare un sistema fondamentale di atti di movimento virtuale, poichè sono evidentemente $\nu - \mu$ atti di movimento virtuali fra loro indipendenti quelli i cui coefficienti sono

$$E_j^{(l')}\varepsilon_j, \quad E_j^{(m')}\varepsilon_j, \quad E_j^{(n')}\varepsilon_j, \quad E_j^{(p')}\varepsilon_j, \quad E_j^{(q')}\varepsilon_j, \quad E_j^{(r')}\varepsilon_j,$$
$$(j = 1, 2, \ldots \nu - \mu)$$

corrispondenti all'ipotesi che la velocità del punto cui compete il posto (x, y, z) abbia per componenti

$$\delta x = E_j^{(l')}\varepsilon_j + E_j^{(q')}\varepsilon_j(z - c) - E_j^{(r')}\varepsilon_j(y - b)$$
$$\delta y = E_j^{(m')}\varepsilon_j + E_j^{(r')}\varepsilon_j(x - a) - E_j^{(p')}\varepsilon_j(z - c)$$
$$\delta z = E_j^{(n')}\varepsilon_j + E_j^{(p')}\varepsilon_j(y - b) - E_j^{(q')}\varepsilon_j(x - a).$$

Siccome poi le (1), dove le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-\mu}$ possono assegnarsi a piacere ad un sistema fondamentale qualsivoglia, traducono la condizione necessaria e sufficiente perchè l'atto di movimento rappresentato dalle (1) del paragrafo precedente sia un atto di movimento virtuale del mobile considerato, si vede ancora immediatamente che ogni atto di movimento virtuale del mobile riuscirà o compreso fra i costituenti il sistema fondamentale o composto con essi. *C. V. D.*

Rappresentare un dato atto di movimento virtuale come composto mediante i costituenti un determinato sistema fondamentale si dirà talvolta, per brevità di discorso, *risolverlo* negli atti di movimento medesimi.

§ 24. — Formando le equazioni (2) del § 22 negli esempii precedentemente considerati, troviamo subito che atto di movimento virtuale del solido, ad ogni istante,

nel I (§ 15) è ogni atto di movimento rotatorio, il cui asse passa pel posto del punto vincolato al supposto istante — risolubile in tre atti di movimento rotatorio indipendenti, i cui assi passano per lo stesso posto e hanno direzioni mutuamente perpendicolari, prestabilite:

nel II (§ 16), ogni atto di movimento per cui la velocità del punto vincolato è o nulla o parallela al piano tangente, nel posto in cui cade al supposto istante, alla superficie data — risolubile in cinque atti di movimento indipendenti, due traslatorii secondo due assi tracciati nel piano tangente, fra loro perpendicolari, e tre rotatorii, i cui assi passano pel suddetto posto, e hanno direzioni prestabilite, mutuamente perpendicolari:

nel III (§ 17), ogni atto di movimento rotatorio intorno all'asse, che rappresenta la posizione della retta vincolata all'istante considerato:

nel IV (§ 18), ogni atto di movimento traslatorio parallelo al piano, nella posizione che gli compete al supposto istante, risolubile in due, fra loro indipendenti, secondo assi ortogonali, aventi direzioni prestabilite, ed ogni atto di movimento rotatorio il cui asse è perpendicolare al piano, nella suddetta posizione:

nel V (§ 19), ogni atto di movimento per cui la velocità del punto del contorno, che funge da punto di contatto all'istante considerato, è o nulla o parallela al piano, nella posizione che gli compete a questo istante — risolubile in cinque atti di movimento indipendenti, due traslatorii secondo assi paralleli al piano, in quella posizione, e tre rotatorii con assi passanti pel punto suddetto, e aventi direzioni mutuamente perpendicolari prestabilite:

nel VI (§ 20), infine, ogni atto di movimento per cui è nulla la velocità del punto del contorno, che funge da punto di contatto al considerato istante, cioè ogni atto di movimento rotatorio coll'asse passante per quel punto — risolubile in tre atti di movimento rotatorio come i suddetti.

Ora, se, in ogni esempio, si considera il movimento relativo alla terna d'assi mobili che abbiamo invocato per interpretare la forma differenziale delle equazioni traducenti i vincoli — assi a cui è invariabilmente unito il punto vincolato nel I esempio, il punto della superficie in cui cade il punto vincolato nel II, la retta vincolata nel III, il piano mobile nel IV, V, VI — il vincolo competente a questo movimento relativo riesce rispettiva-

mente quello del punto vincolato, della superficie, della retta vincolata, e del piano fisso, diverso, per conseguenza, in generale, da quello che compete al movimento effettivo: invece l'atto di movimento virtuale riesce costantemente lo stesso.

Questo è il significato dell'indicata espressione che l'atto di movimento virtuale si definisce, nel caso dei vincoli variabili col tempo, fissandoli nella loro condizione al supposto istante (§ 22).

Vediamo ora come la stessa proprietà stia in generale.

§ 25. — In conseguenza della nostra definizione generale, dato un sistema di corpi rigidi, se insieme con un suo movimento conforme ad un vincolo qualsivoglia — rappresentato da (2) o (4) del § 14 — si considera il corrispondente movimento relativo ad una terna d'assi mobili, quantunque questo riuscirà conforme ad un vincolo diverso dal precedente, sarà però lo stesso, per ambedue i movimenti, ogni atto di movimento virtuale ad un istante qualsivoglia.

Difatti, poichè l' atto di movimento effettivo — definito dalle sestuple l, m, n, p, q, r — nel primo movimento sarà, ad ogni istante, composto degli atti di movimento competenti al movimento di trascinamento, e al movimento relativo, al supposto istante *, indicando con $l_{\mathfrak{S}}, \ldots p_{\mathfrak{S}}, \ldots$ e con $l_{\mathfrak{R}}, \ldots p_{\mathfrak{R}}, \ldots$ i parametri aventi, per questi due movimenti, lo stesso significato dei suddetti $l, \ldots p, \ldots$, sarà

$$l = l_{\mathfrak{R}} + l_{\mathfrak{S}}, \ \ldots \ p = p_{\mathfrak{R}} + p_{\mathfrak{S}}, \ \ldots$$

Con ciò le (6) diventano

$$\Sigma \left(L_i \, l_{\mathfrak{R}} + \ldots + P_i \, p_{\mathfrak{R}} + \ldots\right) = \overline{T}_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

equazioni, dove le $L_i, \ldots P_i, \ldots$ sono le stesse come in (6), ma $\overline{T}$ rappresenta una funzione generalmente diversa da T_i, le quali esprimono il vincolo competente al movimento relativo, generalmente diverso dal precedente.

Ma, per la ricordata definizione, l'atto di movimento vir-

* *Meccanica*, § 175.

tuale corrispondente a questo nuovo vincolo, essendo rappresentato da

$$\Sigma(L_i l'_{\mathfrak{R}} + \ldots, + P_i p'_{\mathfrak{R}} + \ldots) = 0,$$

che si riduce a (2), del § 22, cambiando $l'_{\mathfrak{R}}, \ldots p'_{\mathfrak{R}}, \ldots$ in $l', \ldots p', \ldots$, si vede ch'è lo stesso come nel primo movimento, *C. V. D.*

Stabilito così il concetto d'atto di movimento virtuale, è riserbato alle applicazioni di mostrarne la ragione e l'utilità.

Definizione delle pressioni vincolari applicate ad un sistema di corpi rigidi vincolati e relativi postulati.

§ 26. — *Postulato.* Ammettiamo che ad ogni specie di vincoli di un sistema di corpi rigidi, conformi alle nostre ipotesi, corrisponda un sistema di pressioni, applicate al mobile medesimo, per considerarne, per ogni corpo, il risultante (X', Y', Z'), e il momento (L', M', N') rispetto ad un polo (a, b, c), i quali, se occorre, si dovranno intendere come limiti del risultante e del momento di un sistema di pressioni applicate a parte del contorno, col tendere di questa ad un punto o ad una linea *. Chiameremo queste pressioni « pressioni vincolari » e gl'indicati vettori « risultante, e momento rispetto al punto $(a, b, c,)$ delle pressioni vincolari ».

Il significato di questo postulato è che, concependo composte le pressioni vincolari colle « forze impresse », determinate da quelle condizioni del movimento, che non sono gl'indicati vincoli (cfr. § 55 e seguenti) — pressioni preventivamente date, e forze limite, esterne per rispetto ad ogni corpo, corrispondenti alle forze elementari, che competono alle supposte condizioni fisiche dei corpi ** — staranno, per ogni corpo componente il sistema, come se fosse libero, le sei equazioni cardinali del movimento ***.

---

* Cfr. *Meccanica*, § 408.

** *Meccanica*, §§ 379 e segg.

*** *Meccanica*, §§ 305, 306.

Vale a dire, indicando, per ogni corpo, con (X, Y, Z) il risultante delle forze impresse, e con (L, M, N) il loro momento rispetto al punto (a, b, c), si avrà per lo stesso corpo,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_\tau k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \mathrm{X} + \mathrm{X}', \quad \int_\tau k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}', \quad \int_\tau k \frac{d^2 z}{dt^2} d\tau = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}' \\
&\qquad \int_\tau k \left[(y-b) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z-c) \frac{d^2 y}{dt^2} \right] d\tau = \mathrm{L} + \mathrm{L}' \\
&\qquad \int_\tau k \left[(z-c) \frac{d^2 x}{dt^2} - (x-a) \frac{d^2 z}{dt^2} \right] d\tau = \mathrm{M} + \mathrm{M}' \\
&\qquad \int_\tau k \left[(x-a) \frac{d^2 y}{dt^2} - (y-b) \frac{d^2 x}{dt^2} \right] d\tau = \mathrm{N} + \mathrm{N}'.
\end{aligned}
\right\}
$$

Alle quali equazioni, assumendo per (a, b, c) il centro di massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ si può dare la forma

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{M} \frac{d^2 \overline{x}}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{X}', \quad \mathrm{M} \frac{d^2 \overline{y}}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}', \quad \mathrm{M} \frac{d^2 \overline{z}}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}' \\
&\qquad \frac{d(P \mathfrak{p} \alpha_1 + Q \mathfrak{q} \alpha_2 + R \mathfrak{r} \alpha_3)}{dt} = \overline{\mathrm{L}} + \overline{\mathrm{L}}' \\
&\qquad \frac{d(P \mathfrak{p} \beta_1 + Q \mathfrak{q} \beta_2 + R \mathfrak{r} \beta_3)}{dt} = \overline{\mathrm{M}} + \overline{\mathrm{M}}' \\
&\qquad \frac{d(P \mathfrak{p} \gamma_1 + Q \mathfrak{q} \gamma_2 + R \mathfrak{r} \gamma_3)}{dt} = \overline{\mathrm{N}} + \overline{\mathrm{N}}',
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

dove le lettere soprassegnate indicano che il polo dei momenti è il centro di massa, e del resto i simboli conservano il significato precedentemente attribuitovi in tali espressioni (cfr. § 10): o anche, trasformando la seconda terna col riferirsi alla terna formata cogli assi principali d' inerzia nel centro di massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s, (s = 1, 2, 3))$ (cfr. § 10):

$$\left.\begin{array}{c} M\dfrac{d\bar{x}}{dt} = X + X', \quad M\dfrac{d^2\bar{y}}{dt^2} = Y + Y', \quad M\dfrac{d^2\bar{z}}{dt^2} = Z + Z' \\ P\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q - R)\mathfrak{q}\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{L}} + \bar{\mathfrak{L}}' \\ Q\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} - (R - P)\mathfrak{r}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{M}} + \bar{\mathfrak{M}}' \\ R\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} + (P - Q)\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{N}} + \bar{\mathfrak{N}}'. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Le ipotesi relative alle X', Y', Z', L', M', N', in numero sestuplo di quello dei corpi, non sono subordinate ad altra condizione specifica che a quella che siano verificate le equazioni traducenti i supposti vincoli. Che se concepiamo queste condizioni come imposte alle medesime variabili, riesce disponibile un numero di esse eguale a quello dei gradi di libertà del sistema. Ciò che può esprimersi col dire che infinite ipotesi sono ammissibili *a priori* sopra le pressioni vincolari, con un ordine d'infinità eguale a quello dei gradi di libertà del sistema.

Ogni ipotesi speciale corrisponde ad un particolàr modo d'intendere ottenuto coll'applicazione di un sistema di pressioni il supposto vincolo: e, ammessa *a priori,* è riserbato al confronto fra le conseguenze del calcolo e il fatto sperimentale di valutarne l'opportunità, tanto più opportuna dovendo reputarsi un'ipotesi quanto più ampio è l'ordine di fatti che collimano colle sue conseguenze.

§ 27. — *Postulato.* Ammettiamo che le pressioni vincolari applicate ad un sistema di corpi rigidi comunque vincolato, conformemente alle nostre ipotesi fondamentali, siano caratterizzate dalla proprietà che la competente potenza complessiva, per ogni atto di movimento virtuale del sistema mobile, sia nulla.

In altri termini, ammettiamo che si abbia (cfr. § 11 e § 22)

$$\Sigma(X'l' + Y'm' + Z'n' + L'p' + M'q' + N'r') = 0, \qquad (1)$$

la somma essendo estesa ai pezzi rigidi componenti il sistema.

L'opportunità di questa ipotesi apparirà dallo sviluppo delle sue conseguenze. Noi vedremo come, grazie ad essa, le pressioni vincolari, valendosi delle equazioni traducenti il vincolo, si pos-

sano determinare in ogni caso, e ne forniscano, negli esempii esaminati più particolarmente, *a posteriori*, un' acconcia definizione.

Intanto, per rilevare lo spirito del procedimento in discorso, osserviamo che, applicando la (1) successivamente agli atti di movimento virtuali formanti un sistema fondamentale (§ 23), si otterranno tante relazioni fra le X', Y', Z', L', M', N', di tutti i pezzi rigidi, quanti sono i gradi di libertà del sistema, cioè quante mancano per formare, insieme colle equazioni traducenti i vincoli, tante condizioni quante sono le incognite medesime.

Equazione di d'Alembert e Lagrange.

§ 28. — Moltiplichiamo le (1) del § 26 rispettivamente per l', m', n', p', q', r', — col significato di questi parametri definito nel § 22 — e poi sommiamo le equazioni medesime, così moltiplicate, per tutti i pezzi rigidi del sistema. Abbiamo, per (1) del paragrafo precedente,

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma\Big\{ & l'\left(\int_\tau k\frac{d^2x}{dt^2}d\tau - X\right) + m'\left(\int_\tau k\frac{d^2y}{dt^2}d\tau - Y\right) + n'\left(\int_\tau k\frac{d^2z}{dt^2}d\tau - Z\right) \\
& + p'\left(\int_\tau k\left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right]d\tau - L\right) \\
& + q'\left(\int_\tau k\left[(z-c)\frac{d^2x}{dt^2} - (x-a)\frac{d^2z}{dt^2}\right]d\tau - M\right) \\
& + r'\left(\int_\tau k\left[(x-a)\frac{d^2y}{dt^2} - (y-b)\frac{d^2x}{dt^2}\right]d\tau - N\right)\Big\} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

Questa è l' « equazione di d'Alembert e Lagrange » pel mobile considerato.

Con essa vanno congiunte le μ equazioni che definiscono l', m', n', p', q', r' (§ 22)

$$\Sigma\,(L_i l' + M_i m' + N_i n' + P_i p' + Q_i q' + R_i r') = 0. \quad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

Osservazione. — Notiamo che, ponendo

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{X} = \int\limits_{\tau} k X d\tau + \int\limits_{\sigma} X_n \, d\sigma, \qquad \mathrm{Y} = \ldots \qquad \mathrm{Z} = \ldots \\ \mathrm{L} = \int\limits_{\tau} k\left[(y-b) Z - (z-c) Y\right] d\tau + \int\limits_{\sigma} \left[(y-b) Z_n + (z-c) Y_n\right] d\sigma \\ \mathrm{M} = \ldots \qquad \mathrm{N} = \ldots, \end{array}\right\} \quad (2)$$

per modo che (X, Y, Z) e (X_n, Y_n, Z_n) rappresentino la forza acceleratrice limite e la pressione specifica nel punto $(x\,y\,z)$ del volume τ, e della superficie σ, del pezzo generico (cfr. § 26), e introducendo le (1) del § 22, la precedente equazione prende la forma, sotto cui, a suo luogo, ci gioverà considerarla,

$$\Sigma \int\limits_{\tau} k\left(\frac{d^2 x}{d t^2} \delta x + \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y + \frac{d^2 z}{d t^2} \delta z\right) d\tau - \Pi = 0, \qquad (3)$$

$$\Pi = \Sigma \left[\int\limits_{\tau} k\left(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z\right) d\tau + \int\limits_{\sigma} \left(X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z\right) d\sigma\right]$$

dove Π rappresenta la misura della potenza delle forze impresse corrispondente al supposto atto di movimento virtuale.

Definizione delle equazioni pure del movimento di un sistema di corpi rigidi vincolati.

§ 29. — *Definizione.* Chiameremo « equazione pura » del movimento del sistema di corpi rigidi in discorso ogni combinazione lineare dell'insieme delle equazioni cardinali relative ai pezzi rigidi componenti il sistema ((1), (2) o (3) del § 26), i cui coefficienti siano funzioni del tempo, delle coordinate del sistema e delle loro derivate prime rispetto al tempo, la quale non contenga gli elementi appartenenti alle pressioni vincolari, cioè le X', Y', Z', L', M', N' per alcun corpo. E « sistema delle equazioni pure del movimento del sistema di corpi rigidi » in

discorso chiameremo un insieme di equazioni pure, fra loro indipendenti, in numero eguale a quello dei gradi di libertà.

È chiaro che, combinando queste equazioni con quelle che traducono i vincoli, e intendendo che le componenti del risultante e del momento delle forze impresse, applicate ad ogni corpo, sono funzioni regolari delle coordinate del sistema, delle loro derivate rispetto al tempo, e del tempo medesimo, si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie — in numero eguale a quello delle coordinate del sistema — atto a determinare, col concorso dei valori iniziali *, le coordinate medesime in funzione del tempo.

Osservazione. — Quando il sistema sia olonomo, concependo le coordinate normali espresse per mezzo di coordinate libere (§ 21), le equazioni pure si ridurranno ad un sistema di equazioni differenziali del 2° ordine, di numero eguale a quello delle coordinate libere medesime, dove esse fungono da incognite, e il tempo da variabile indipendente, atto a determinarle univocamente in funzione del tempo, col concorso del loro valore e di quello del loro coefficiente differenziale rispetto al tempo, ad un istante.

Formazione delle equazioni pure del movimento di un sistema di corpi rigidi vincolati.

§ 30. — Sia il vincolo imposto al sistema rappresentato dalle equazioni [(4) del § 14]

$$\Sigma\,(L_i l + M_i m + N_i n + P_i p + Q_i q + R_i r) = T_i : \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu),$$

e perciò le condizioni che definiscono l'atto di movimento virtuale ad ogni istante (§ 22) siano

$$\Sigma\,(L_i l' + M_i m' + N_i n' + P_i p' + Q_i q' + R_i r') = 0. \qquad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

Concepiamo da queste equazioni, come al § 23, ricavate

$$l' = \Sigma' \, E_j^{(l')} \varepsilon_j, \quad \ldots \quad p' \, \Sigma' \, E^{(p')} \varepsilon_j \quad \ldots : \qquad (3)$$

* Ben inteso che i valori iniziali dovranno soddisfare le condizioni traducenti i vincoli.

introdotte queste espressioni di l', ... p', ... nella equazione di d'Alembert e Lagrange (§ 28)

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma\left\{l'\left(\int_\tau k\frac{d^2x}{dt^2}d\tau-X\right)+\cdots+\right.\\ \left.+p'\left(\int_\tau k\left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2}-(z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right]d\tau-L\right)+\cdots\right\}=0:\end{array}\right\}(4)$$

raccolte le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-\mu}$: e, conformemente alla loro qualità di parametri arbitrarii, eguagliato a zero il coefficiente di ciascuna. Otteniamo le equazioni

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma\left\{E_j^{(l')}\left(\int_\tau k\frac{d^2x}{dt^2}d\tau-X\right)+\right.\\ \left.+E_j^{(p')}\left(\int_\tau k\left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2}-(z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right]d\tau-L\right)+\cdots\right\}=0,\\ (j=1,2,\ldots\nu-\mu)\end{array}\right\}(5)$$

dove la sommatoria è estesa ai pezzi rigidi componenti il sistema: le quali costituiscono, secondo la definizione (§ 29), un sistema di equazioni pure del movimento del sistema di corpi considerato *.

Questo si riduce ad applicare l'equazione (4), col farvi nulle, secondo le (3), tutte le ε, meno una, successivamente, ai $\nu-\mu$ atti di movimento virtuale così definiti dalle stesse (3), che costituiscono un sistema fondamentale (§ 23). E se ne deduce il canone che, per formare un sistema di equazioni pure del movimento di un sistema di corpi rigidi vincolati, basta applicare l'equazione di d'Alembert e Lagrange, successivamente, a tanti atti di movimento virtuale del sistema mobile considerato, quanti occorrono per formare un sistema fondamentale.

Ogni altro atto di movimento virtuale dello stesso mobile riuscendo composto con questi (§ 23), ne viene, senz'altro, che un'equazione pura, dedotta, collo stesso procedimento, per mezzo di esso, sarà una combinazione lineare delle precedenti.

---

* L'indipendenza di queste $\nu-\mu$ equazioni si riconosce allo stesso modo che quella dei corrispondenti atti di movimento virtuale (§ 23). Una relazione lineare omogenea fra le E_j relative ad ogni coefficiente non può darsi, perchè ne verrebbe nullo il determinante delle formole con cui ogni insieme di $\nu-\mu$ coefficienti si esprime per mezzo delle ε_j.

§ 31. — Per le (1) del § 26, le (5) del precedente paragrafo possono scriversi

$$\Sigma \left\{ E_j^{(l')} X'_{\cdot} + \ldots + E_j^{(p')} L' + \ldots \right\} = 0. \qquad (1)$$
$$(j = 1, 2, \ldots \nu - \mu)$$

E queste sono le condizioni, in numero eguale a quello dei gradi di libertà, che risultano imposte agli elementi delle pressioni vincolari, e ne traducono le proprietà caratteristiche, conformemente ai vincoli supposti nei singoli casi, e al postulato generale che sia nulla la loro potenza per ogni atto di movimento virtuale (§ 27).

§ 32. — Quando sia atto di movimento virtuale quello per cui un gruppo di corpi del sistema ha atto di movimento traslatorio secondo un asse (A, B, C), e il gruppo rimanente atto di movimento nullo, facendo in (4) del § 30, pel primo gruppo,

$$l' = A\varepsilon, \qquad m' = B\varepsilon, \qquad n' = C\varepsilon, \qquad p' = q' = r' = 0,$$

e, pel secondo,

$$l' = m' = n' = p' = q' = r' = 0,$$

se ne ricava immediatamente l'equazione pura

$$\int_\tau k\left(A\frac{d^2 x}{dt^2} + B\frac{d^2 y}{dt^2} + C\frac{d^2 z}{dt^2}\right) d\tau - S,$$

dove la sommatoria Σ è estesa al primo gruppo, e S rappresenta la componente secondo il supposto asse del risultante delle forze impresse, applicate al gruppo medesimo.

Quest'eguaglianza esprime che sono eguali e di senso opposto le componenti secondo il supposto asse del risultante delle forze d'inerzia e delle forze impresse, applicate al gruppo: ciò che si esprime dicendo che si verifica, pel supposto asse, e pel gruppo considerato, il teorema del risultante delle forze d'inerzia, sottintendendo che questa proprietà generale del movimento risulta verificata dalle sole forze impresse. E questo è anche il significato delle espressioni analoghe, relative ai casi seguenti.

Per le (1) del § 26, la componente omologa del risultante delle pressioni vincolari applicate al gruppo riesce, nella stessa ipotesi, nulla.

Ove l'asse sia fisso, la precedente equazione può scriversi, indicando con $\bar{s}$, $\dot{\bar{s}}$ e M la coordinata del centro di massa del gruppo secondo un asse spiccato da un punto fisso colla supposta orientazione (A, B, C), la componente della velocità del centro di massa secondo lo stesso asse, e la grandezza della massa del gruppo,

$$M \frac{d^2 \bar{s}}{d t^2} = M \frac{d \dot{\bar{s}}}{d t} = S.$$

Queste eguaglianze esprimono, alla lor volta, che il prodotto della massa del gruppo per la componente secondo il supposto asse dell'accelerazione del centro di massa del gruppo medesimo, ossia la componente secondo detto asse della derivata della quantità di moto del gruppo rispetto al tempo, sono eguali alla componente omologa delle forze impresse applicate al gruppo. Ciò che esprimeremo col dire che si verifica secondo il supposto asse, e pel gruppo considerato, il teorema del movimento del centro di massa, e quello della quantità di moto *.

Supposto inoltre $S = 0$, la precedente equazione fornisce i due integrali

$$\frac{d \bar{s}}{d t} = \text{cost.} \qquad \bar{s} = \text{cost. } t + \text{cost.}$$

esprimenti che la suddetta coordinata varia con movimento uniforme, e la componente omologa della quantità di moto è costante. Con che diremo che si verificano, secondo l'asse, e pel gruppo considerato, il teorema della conservazione del movimento del centro di massa e quello della conservazione della quantità di moto**.

§ 33. — Quando sia atto di movimento virtuale del sistema quello per cui un gruppo di corpi ha atto di movimento rotatorio secondo l'asse passante pel punto (a, b, c), colla orienta-

* *Meccanica*, § 252.
** *Meccanica*, § 253.

zione (A, B, C), e il gruppo rimanente atto di movimento nullo, facendo nella (4) del § 30, pel primo gruppo,

$$l' = m' = n' = 0, \qquad p' = A\varepsilon, \qquad q' = B\varepsilon, \qquad r' = C\varepsilon,$$

e, pel secondo,

$$l' = m' = n' = p' = q' = r' = 0,$$

se ne ricava, senz'altro, l'equazione pura

$$\left.\begin{aligned}\Sigma \int_\tau k \Big\{ & A\left[(y-b)\frac{d^2 z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2 y}{dt^2}\right] \\ & + B\left[(z-c)\frac{d^2 x}{dt^2} - (x-a)\frac{d^2 z}{dt^2}\right] \\ & + C\left[(x-a)\frac{d^2 y}{dt^2} - (y-b)\frac{d^2 x}{dt^2}\right]\Big\} d\tau = \mathrm{A},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove la sommatoria Σ è estesa ai corpi componenti il gruppo, e A rappresenta la componente secondo l'asse (A, B, C) del momento rispetto al punto (a, b, c), come polo, delle forze impresse applicate al gruppo.

Questa eguaglianza esprime che sono eguali e di senso contrario le componenti secondo il supposto asse del momento rispetto al punto (a, b, c), come polo, delle forze d'inerzia e delle forze impresse, applicate al gruppo. E ciò esprimeremo col dire che si verifica secondo l'asse, e pel punto considerato, nel supposto gruppo, il teorema del momento delle forze d'inerzia.

Per le (1) del § 26, la componente omologa del momento delle pressioni vincolari rispetto al supposto punto, come polo, è nulla.

Ove a, b, c e A, B, C siano costanti, cioè invariabili il punto considerato dell'asse e la sua orientazione, l'equazione può scriversi, indicando con u, v, w le componenti della velocità del punto generico, (§ 10),

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Sigma \int_\tau k \Big\{ & A\left[(y-b)w - (z-c)v\right] + \\ & + B\left[(z-c)u - (x-a)w\right] + C\left[(x-a)v - (y-b)u\right]\Big\} d\tau = \mathrm{A}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

esprimente che sono eguali le componenti secondo il supposto asse della derivata della quantità di moto areale rispetto al punto considerato, e del momento delle forze impresse rispetto al medesimo punto come polo: con che si dirà che si verifica il teorema delle aree rispetto al punto e secondo l'asse medesimo, o anche nel piano orientato perpendicolare *.

Supposto inoltre $A = 0$, si ha l'integrale

$$\Sigma \int_\tau k \Big\{ A\left[(y-b)w-(z-c)v\right]+ \\ + B\left[(z-c)u-(x-a)w\right]+ \\ + C\left[(x-a)v-(y-b)u\right]\Big\} d\tau = \text{cost.}$$

esprimente che la suddetta componente della quantità di moto areale rispetto al punto considerato è costante; e allora si dice che si verifica rispetto al punto, e secondo l'asse, o nel piano perpendicolare, in discorso, il teorema della conservazione delle aree **.

Supposta invariabile l'orientazione (A, B, C) dell'asse, ma per punto (a, b, c) preso il centro di massa $(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$ — cioè supposto che atto di movimento virtuale sia l'atto di movimento rotatorio del gruppo intorno ad un asse avente quell'orientazione invariabile, e passante pel centro di massa, l'equazione (1) si può porre ancora sotto la forma analoga a (2) (§ 10)

$$\frac{d}{dt} \Sigma \int_\tau k \Big\{ A\left[(y-\bar{y})(w-\bar{w})-(z-\bar{z})(v-\bar{v})\right]+ \\ + B\left[(z-\bar{z})(u-\bar{u})-(x-\bar{x})(w-\bar{w})\right]+ \\ + C\left[(x-\bar{x})(v-\bar{v})-(y-\bar{y})(u-\bar{u})\right]\Big\} d\tau = \bar{A},$$

donde, ove sia $\bar{A} = 0$, cioè nulla la componente secondo detto

* *Meccanica*, § 310.

** *Meccanica*, § 312.

asse del momento delle forze impresse rispetto al centro di massa come polo, si ricava l'integrale

$$\Sigma \int_\tau k \Big\{ A \Big[(y-\bar{y})(w-\bar{w}) - (z-\bar{z})(v-\bar{v}) \Big] +$$
$$+ B \Big[(z-\bar{z})(u-\bar{u}) - (x-\bar{x})(w-\bar{w}) \Big] +$$
$$+ C \Big[(x-\bar{x})(v-\bar{v}) - (y-\bar{y})(u-\bar{u}) \Big] \Big\} d\tau = \text{cost.}$$

Le quali equazioni si enunciano con proposizioni analoghe alle precedenti, concernenti la quantità di moto areale rispetto al centro di massa nel movimento relativo al centro di massa, cioè nel movimento relativo ad una terna d'assi d'orientazione fissa, coll'origine nel centro di massa, le forze impresse restando quelle che competono al movimento rispetto agli assi fissi *.

§ 34. — Quando i vincoli sono indipendenti dal tempo, l'atto di movimento effettivo, ad ogni istante, è, allo stesso istante, atto di movimento virtuale (§ 22); e perciò, ponendo

$$l' = l, \quad m' = m, \quad n' = n, \quad p' = p, \quad q' = q, \quad r' = r,$$

la (4) del § 30 si trasforma nell'equazione pura

$$\Sigma \Big\{ l \Big(\int_\tau k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau - \mathrm{X} \Big) + \ldots +$$
$$+ p \Big(\int_\tau k \Big[(y-b) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z-c) \frac{d^2 y}{dt^2} \Big] d\tau - \mathrm{L} \Big) + \ldots \Big\} = 0,$$

la quale, indicando, al solito con T la grandezza della forza viva del sistema, e con P la misura della potenza delle forze impresse corrispondente all'atto di movimento effettivo, al supposto istante, può scriversi

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{P}. \qquad (1)$$

* *Meccanica*, §§ 311, 312.

Così, quando i vincoli sono indipendenti dal tempo, il coefficiente differenziale della forza viva rispetto al tempo è eguale, ad ogni istante, alla misura della potenza delle forze impresse corrispondente all'atto di movimento allo stesso istante, donde scaturisce che l'incremento della forza viva del mobile fra l'origine e il termine di un qualunque intervallo di tempo e il lavoro delle forze impresse corrispondente al movimento del sistema fra l'uno e l'altro istante hanno la stessa misura, ossia, con più breve locuzione, sono fra loro eguali. Ciò che si esprime col dire che, nel movimento in discorso, si verifica il teorema della forza viva *.

Infine, se le forze impresse ammettono potenziale — vale a dire, se esiste una funzione delle coordinate del sistema, tale che, concependo queste coordinate come funzioni del tempo, il suo coefficiente differenziale rispetto al tempo, rappresenti, per ogni valore di questo, la potenza delle forze impresse corrispondente al relativo atto di movimento del sistema (definito dai coefficienti differenziali delle coordinate rispetto al tempo) — indicando il potenziale medesimo con W, si avrà l'integrale

$$T - T_0 = W - W_0$$

ossia

$$T = W + \text{cost.}$$

che si chiama l'integrale della conservazione dell'energia (o della forza viva): e si dirà che, nel considerato movimento, si verifica il teorema della conservazione dell'energia **.

Equilibrio di un sistema di corpi rigidi comunque vincolati.

§ 35. — Un mobile si dice, *in un intervallo di tempo,* in equilibrio, quando, nello stesso intervallo, ogni suo punto serba una posizione invariata. L'equilibrio è quindi, in certo qual modo,

* *Meccanica,* § 269.
** *Meccanica,* § 285.

quella forma speciale di movimento, che corrisponde all'ipotesi che i parametri individuanti la posizione del mobile — quindi, nel caso del nostro sistema di corpi rigidi, le coordinate normali, o le coordinate libere, del sistema — riescano, anzichè funzioni del tempo, altrettante costanti.

La possibilità dell'equilibrio trae con sè alcune condizioni *a priori*. Intanto, riuscendo nulli, per ipotesi, i coefficienti differenziali delle coordinate del sistema per rispetto al tempo, essi non si presteranno a definire i vincoli, e questi dovranno supporsi rappresentabili mediante relazioni fra le coordinate — vale a dire si dovrà supporre che il sistema sia olonomo (cfr. § 14).

In secondo luogo, è conforme all'ipotesi medesima ammettere che le forze impresse sieno funzioni puramente delle coordinate.

Ciò premesso, le equazioni competenti all'equilibrio si ricaveranno dalle equazioni precedentemente stabilite pel movimento, semplicemente eguagliandovi a zero i termini che rappresentano elementi relativi al sistema delle forze d'inerzia, come vuole la circostanza che, nel presente caso,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

per ogni punto del mobile.

§ 36. — Così le (1) del § 26 diventano

$$\left.\begin{array}{lll} X + X' = 0, & Y + Y' = 0, & Z + Z' = 0 \\ L + L' = 0, & M + M' = 0, & N + N' = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

da intendersi scritte per ciascuno dei pezzi rigidi del sistema, che sono le equazioni cardinali dell'equilibrio.

Esse esprimono manifestamente che, nel caso dell'equilibrio, gli elementi relativi alle pressioni vincolari sono eguali e di senso opposto agli analoghi elementi relativi alle forze impresse.

§ 37. — L'equazione di d'Alembert e Lagrange ((4) del § 30) diventa

$$\Sigma (X l' + Y m' + Z n' + L p' + M q' + N r') = 0, \quad (1)$$

cui vanno aggiunte

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma (L_i l' + M_i m' + N_i n' + P_i p' + Q_i q' + R_i r') = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots \mu). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Essa si chiama, in questo caso, più particolarmente, equazione delle velocità virtuali, ed esprime che, supposto un sistema mobile, cui sono imposti certi vincoli, e applicate certe forze impresse, in equilibrio, la potenza complessiva di queste forze impresse, corrispondente ad ogni atto di movimento virtuale sarà nulla (teorema delle velocità virtuali).

§ 38. — Da queste equazioni, col procedimento precedentemente seguito per formare le (5) del § 30, o direttamente da queste equazioni, col canone indicato, si deducono le « equazioni pure dell'equilibrio »

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma\,(E_j^{(l')}\,X + \ldots + E_j^{(p')}\,L + \ldots) = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots \nu - \mu)\end{array}\right\}(1)$$

dove le $E_j^{(l')}, \ldots E^{j(p')} \ldots$ definite, come al § 30, da

$$l' = \Sigma'\, E_j^{(l')}\, \varepsilon_j, \quad \ldots \quad p' = \Sigma'\, E_j^{(p')}\, \varepsilon_j, \quad \ldots \qquad (2)$$

conformemente alle (2) del precedente paragrafo, sono, in questo caso, funzioni delle coordinate del sistema. E vi si debbono aggiungere

$$E_i\,(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = 0, \qquad (i = 1, 1, \ldots \mu) \qquad (3)$$

traducenti i vincoli del sistema (§ 14). Con che, essendo le X, ... L, ... supposte, in generale, funzioni delle coordinate del sistema, si ottengono, fra esse, altrettante equazioni.

Queste equazioni determinano, o almeno limitano, le posizioni in cui il sistema considerato può essere in equilibrio, vale a dire le posizioni che può serbare indefinitamente.

§ 39. — *Posizioni d'equilibrio.* Posizione d'equilibrio di un sistema, relativa a certi vincoli, e a certe forze impresse — o, meglio, ad una certa specie di forze impresse, intese definite da date condizioni, e determinate di valore per ogni posizione del sistema — si chiama ogni posizione, nella quale, in tali ipotesi, il sistema può mantenersi in equilibrio.

Per quanto precede, queste sono tutte e sole le posizioni corrispondenti a valori delle coordinate che soddisfanno alle equazioni d'equilibrio: le quali servono per determinarle, o almeno per distinguerle, per mezzo dei relativi valori delle coordinate.

Notiamo come si avrà un insieme continuo o più di posizioni d'equilibrio, ogniqualvolta le equazioni medesime non saranno atte a determinare — se capita, anche molteplicemente — il valore di tutte le coordinate.

§ 40. — *Teorema fondamentale dell'equilibrio.* Condizione necessaria e sufficiente perchè, in un intervallo di tempo, un sistema, a cui sono imposti certi vincoli, e applicata una certa specie di forze impresse, sia in equilibrio, è che, ad un istante dello stesso intervallo, la sua posizione sia una posizione d'equilibrio relativa a quelle condizioni, e la sua forza viva sia nulla.

Questa condizione, patentemente necessaria, è anche sufficiente. Difatti, se si considerano le equazioni differenziali del movimento del sistema, competenti ai vincoli e alla specie supposta di forze impresse, le quali, per fissar le idee, siano equazioni in coordinate libere (§ 29, *Osservazione*), l'ipotesi che le coordinate medesime serbino costantemente il valore che appartiene alla posizione all'istante indicato soddisfa, in un intervallo di tempo qualsivoglia comprendente detto istante, alle equazioni del movimento in discorso, riuscendone di conseguenza nulli ambedue i membri, e adempie inoltre alle condizioni iniziali che, a quell'istante, la posizione sia la supposta, e la forza viva nulla, con che è nulla la velocità d'ogni punto, e nullo il coefficiente differenziale rispetto al tempo d'ogni coordinata del sistema. D'altra parte, è inteso che una soluzione delle equazioni del movimento è dai valori, ad un istante, delle incognite e dei loro coefficienti differenziali rispetto al tempo, *univocamente* determinata. Quindi l'ipotesi stessa è la sola ammissibile nelle supposte circostanze.

In termini più spediti, l'equilibrio riesce *una forma* di movimento (§ 35), che soddisfa le equazioni differenziali e le condizioni iniziali: e poichè queste ultime determinano *univocamente* una soluzione delle equazioni differenziali medesime, se ne conclude che è *la forma* corrispondente alle supposte circostanze.

§ 41. — *Posizioni d'equilibrio stabile ed instabile.* Posizione d'equilibrio stabile si chiama una posizione d'equilibrio quando, in ogni movimento del mobile, conforme ai vincoli e alla specie supposta di forze impresse, la sua posizione non si scosta da essa oltre un prestabilito confine, in tutto il corso del movimento, pur di supporre che, ad un istante, sia ad essa abbastanza vicina, e la forza viva sia abbastanza piccola: vale a

dire che le differenze fra le coordinate omologhe di detta posizione e della posizione ad un tempo qualsivoglia si manterranno, in valore assoluto, inferiori a termini prestabiliti, purchè, ad un istante, esse stesse e la forza viva siano inferiori a certi termini convenientemente piccoli.

Ogni posizione d'equilibrio, per la quale la suddetta circostanza non si verifica, si dice posizione d'equilibrio instabile.

Osservazione. — Per ben comprendere questa distinzione, giova tener presente che la posizione e l'atto di movimento del mobile ad un istante determinano univocamente un movimento del mobile conforme ai vincoli e alla specie supposta di forze impresse. In ogni caso, se, ad un istante, la posizione è posizione d'equilibrio, e la forza viva nulla — cioè nullo l'atto di movimento — ne segue l'equilibrio nella posizione medesima. Ma, soltanto nel caso della posizione d'equilibrio stabile, si possono realizzare, se non esattamente, con un'approssimazione grande quanto si vuole, le circostanze dell'equilibrio, attribuendo al mobile, ad un istante, una posizione abbastanza prossima ad essa, ed una forza viva abbastanza piccola.

§ 42. — Dal teorema delle velocità virtuali (§ 37) scaturisce che condizione necessaria e sufficiente perchè una posizione di un sistema, a cui sono imposti certi vincoli e applicate forze impresse di una certa specie, sia posizione d'equilibrio relativa a queste certe circostanze, è che sia nulla la potenza delle forze impresse della supposta specie, corrispondente ad ogni atto di movimento virtuale, conforme ai supposti vincoli, il quale si riferisce alla posizione in discorso.

§ 43. — *Caso che le forze impresse ammettano potenziale.* Supposto che le forze impresse ammettano potenziale, W, (cfr. § 34), l'equazione (1) del § 37, esprimente il teorema delle velocità virtuali, conformemente a

$$\begin{aligned}\delta x &= l' + q'(z-c) - r'(y-b)\\ \delta y &= m' + r'(x-a) - p'(z-c)\\ \delta z &= n' + p'(y-b) - q'(x-a)\end{aligned}$$

(cfr. § 21), si può porre, senz'altro, sotto la forma

$$\delta W = 0; \tag{1}$$

dove

$$\delta W = \Sigma \frac{\partial W}{\partial \xi} \delta \xi, \qquad (2)$$

ed essendo

$$E_i(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots \mu) \qquad (3)$$

le equazioni traducenti i vincoli, le $\delta \xi$ sono definite da

$$\Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi} \delta \xi = 0: \qquad (i = 1, 2, \dots \mu) \qquad (4)$$

che se le ξ esprimono coordinate libere, allora le $\delta \xi$ sono arbitrarie.

Così, il teorema delle velocità virtuali consiste, nel presente caso, in questo che, supposto il sistema in equilibrio, il potenziale delle forze impresse riceverà, nella relativa posizione, un valore, che, confrontato cogli altri che sono conformi ai supposti vincoli, risulta possedere la proprietà principale di un «estremo» — comprendendo sotto questo unico termine quelli di massimo e di minimo *.

E questa proprietà serve per caratterizzare le posizioni d'equilibrio: riuscendo condizione necessaria e sufficiente perchè una posizione del sistema sia posizione d'equilibrio competente alle supposte circostanze, quella che il potenziale delle forze impresse vi riceva un valore, che, confrontato cogli altri che sono conformi ai supposti vincoli, possiede la proprietà principale di un estremo.

§ 44. — Concependo dalle (3) del paragrafo precedente ricavate

$$\delta \xi = \Sigma' E^{(\xi)} \varepsilon_j,$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{\nu-\mu}$ sono $\nu - \mu$ parametri indipendenti, e la sommatoria Σ' è estesa ad essi: quindi introducendo queste espressioni in

$$\Sigma \frac{\partial W}{\partial \xi} \delta \xi = 0$$

* Così *Kneser* nel suo *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, 1900).

(cfr. (1) e (2) del precedente paragrafo), raccolte le ε, ed eguagliato a zero il coefficiente di ciascuna di esse, otteniamo

$$\Sigma\, F_j(\xi) \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots \nu - \mu) \tag{1}$$

dove j è costante in ogni equazione, e la sommatoria è estesa alle ξ; la quale è una forma propria di questo caso delle equazioni pure dell'equilibrio (§ 38).

Nell'ipotesi che le ξ rappresentino coordinate libere, nella quale le indicheremo con η, abbiamo semplicemente

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 : \tag{2}$$

tante equazioni quante sono le coordinate η, atte a definire direttamente, per mezzo di esse, le posizioni d'equilibrio.

§ 45. — *Teorema di Dirichlet.* Una posizione di un sistema, cui sono imposti certi vincoli, e applicate forze impresse di una certa specie, che ammettono potenziale, nella quale questo potenziale riceve un valore, che, confrontato cogli altri corrispondenti a posizioni conformi ai vincoli, riesce un massimo effettivo, è posizione di equilibrio stabile.

Concepiamo le posizioni del sistema, conformi ai vincoli, rappresentate da una specie di coordinate libere, che indicheremo con η: e supponiamo, ciò che è sempre lecito, che la posizione considerata corrisponda a $\eta = 0$, e il valor massimo effettivo, che vi riceve il potenziale W delle forze impresse sia 0. Ciò vuol dire che, ogniqualvolta tutte le η soddisfacciano a

$$|\eta| < \varepsilon,$$

con ε indicando un termine positivo abbastanza piccolo, ed una almeno di esse sia diversa da 0, si avrà*

$$W < 0. \tag{1}$$

* $W < 0$ *e non* $W \leqq 0$, nelle indicate condizioni, costituisce la qualità caratteristica del massimo *effettivo*. Questo secondo caso si verificherà, ad esempio, ogniqualvolta il potenziale W sia indipendente da una o più delle coordinate in discorso. Bisogna quindi avvertire che, in siffatta ipotesi, cade in difetto il presente teorema.

Sia ora

$$0 < \varepsilon' < \varepsilon,$$

e indichino $W_{\varepsilon'}$ e $M_{\varepsilon'}$ il generico e il più grande dei valori che riceve W nell'ipotesi che una delle η raggiunga, in grandezza assoluta, ε', mentre le altre non superano, egualmente in grandezza assoluta, lo stesso valore. Sarà, conformemente a (1),

$$M_{\varepsilon'} < 0;$$

oltre di che

$$M_{\varepsilon'} - W_{\varepsilon'} \geqq 0. \tag{2}$$

Ciò posto, indichi T la grandezza della forza viva del mobile in un suo movimento, determinato col concorso delle supposte circostanze e di certe condizioni iniziali, e T_0, W_0 rappresentino i valori di T e di W ad un certo istante.

Si verificherà, essendo i vincoli indipendenti dal tempo e le forze impresse ammettendo potenziale, il teorema della conservazione dell'energia (§ 34), per cui si avrà

$$T - W = T_0 - W_0 ,$$

ossia

$$T = W + T_0 - W_0 . \tag{3}$$

Supponiamo che, al suddetto istante, siano le $|\eta|$ abbastanza piccole, cioè la posizione abbastanza prossima alla considerata, perchè sia

$$-W_0 = |W_0| < -\frac{1}{2} M_{\varepsilon'} ,$$

oltre di che sia

$$T_0 < -\frac{1}{2} M_{\varepsilon'} ,$$

cioè abbastanza piccola, allo stesso istante, la forza viva.

Ne viene

$$T_0 - W_0 < - M_{\varepsilon'} :$$

e, per (3), in tutto il corso del movimento,

$$T < W - M_{\varepsilon'} :$$

in conseguenza di che

$$M_{\varepsilon'} - W < 0.$$

Donde si conclude, per (2), che nessuna delle $|\eta|$ potrà raggiungere, nel corso del movimento, ε'. Che è quanto dire che, sotto le supposte condizioni che, ad un istante, la posizione del sistema sia abbastanza prossima alla considerata, e la sua forza viva sia abbastanza piccola, il sistema non si scosterà, in tutto il corso del movimento, dalla posizione considerata, oltre un certo confine, limitato a piacere *C. V. D.*

Identità delle condizioni imposte alle forze impresse nell'equilibrio e alle pressioni vincolari in generale - Enunciato del Teorema di d'Alembert.

§ 46. — Le condizioni imposte dall'ipotesi dell'equilibrio alle forze impresse e le condizioni imposte, in generale, alle pressioni vincolari, deducendosi rispettivamente da

$$\Sigma (l' X + m' Y + n' Z + p' L + q' M + r' N) = 0$$

((1) del § 37) e da

$$\Sigma (l' X' + m' Y' + n' Z' + p' L' + q' M' + r' N') = 0$$

((1) del § 31) rispettivamente, collo stesso procedimento, risultano identiche: per modo che l'indagine delle equazioni caratteristiche relative alle pressioni, per ogni specie di vincoli (indipendenti dal tempo), implica quella delle condizioni d'equilibrio.

Osservazione. — Introduciamo, per un momento, la locuzione « sistema di forze in equilibrio », per indicare un sistema che soddisfa l'equazione delle velocità virtuali, e « sistemi di forze, che si fanno mutuamente equilibrio », per indicare che vi soddisfa il sistema da essi composto. Allora, il sistema delle pressioni vincolari, nello stesso caso del movimento, risulta in equilibrio, e, per conseguenza, in virtù delle (1) del § 26, risultano sistemi di forze che si fanno mutuamente equilibrio quelli delle forze impresse e delle forze d'inerzia, ad ogni istante.

Questo è, nella sua forma primitiva, il « teorema di d'Alembert ». È manifesto come, con tal canone, dal caso dell'equilibrio si risale a quello del movimento. (V. in seguito al § 54).

Esempii.

§ 47. — Valendosi degli atti di movimento virtuali indipendenti, enumerati nei sei esempii precedentemente considerati (§§ 15-20, § 23), si trovano i risultati seguenti.

Esempio I (§ 15). — Sistema delle equazioni pure del movimento, indicando con L*, M*, N* le componenti del momento delle forze impresse rispetto al punto vincolato, nella sua posizione (x^*, y^*, z^*) al tempo t, come polo, è

$$\int_\tau k\left[(y-y^*)\frac{d^2 z}{dt^2}-(z-z^*)\frac{d^2 y}{dt^2}\right]d\tau = L^*$$

$$\int_\tau k\left[(z-z^*)\frac{d^2 x}{dt^2}-(x-x^*)\frac{d^2 z}{dt^2}\right]d\tau = M^*$$

$$\int_\tau k\left[(x-x^*)\frac{d^2 y}{dt^2}-(y-y^*)\frac{d^2 x}{dt^2}\right]d\tau = N^*.$$

Confrontando queste equazioni colle tre ultime delle (1) del § 26, ne scaturisce che L'*, M'*, N'* sono nulle, cioè nullo il momento delle pressioni vincolari rispetto al punto vincolato come polo, con che il momento delle stesse pressioni vincolari rispetto ad un altro punto qualunque come polo riesce il momento, rispetto allo stesso polo, del risultante di dette pressioni, applicato al punto vincolato (reazione del punto vincolato), e

questo risultante si dice ammettere il punto vincolato per proprio punto d'applicazione *. Tale riesce la proprietà caratteristica delle pressioni vincolari nel caso in discorso.

Infine, supposto che il punto vincolato sia fisso, le equazioni pure dell'equilibrio esprimono che il risultante delle forze impresse, in ogni posizione d'equilibrio del solido, ha, col suddetto significato, il punto vincolato per punto d'applicazione. (Cfr. § 45).

Esempio II (§ 16). — Indichino A, B, C i coseni di direzione della normale alla superficie nel posto del punto vincolato al tempo generico t, o valori proporzionali ad essi, come per esempio $\frac{\partial F}{\partial x^*}, \frac{\partial F}{\partial y^*}, \frac{\partial F}{\partial z^*}$, e $A', B', C', \; A'', B'', C''$, i coseni di direzione di due perpendicolari alla normale medesima, perpendicolari, alla lor volta, fra loro, o valori proporzionali: ciò che viene tradotto da

$$AA' + BB' + CC' = 0, \qquad AA'' + BB'' + CC'' = 0,$$
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0.$$

Sistema di equazioni pure del movimento è

$$\int_\tau k\left(A' \frac{d^2 x}{dt^2} + B' \frac{d^2 y}{dt^2} + C' \frac{d^2 z}{dt^2}\right) d\tau = A' \mathrm{X} + B' \mathrm{Y} + C' \mathrm{Z}$$

$$\int_\tau k\left(A'' \frac{d^2 x}{dt^2} + B'' \frac{d^2 y}{dt^2} + C'' \frac{d^2 z}{dt^2}\right) d\tau = A'' \mathrm{X} + B'' \mathrm{Y} + C'' \mathrm{Z}$$

$$\int_\tau k\left[(y - y^*) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z - z^*) \frac{d^2 y}{dt^2}\right] d\tau = \mathrm{L}^*$$

$$\int_\tau k\left[(z - z^*) \frac{d^2 x}{dt^2} - (x - x^*) \frac{d^2 z}{dt^2}\right] d\tau = \mathrm{M}^*$$

$$\int_\tau k\left[(x - x^*) \frac{d^2 y}{dt^2} - (y - y^*) \frac{d^2 x}{dt^2}\right] d\tau = \mathrm{N}^*.$$

---

* Cfr. *Meccanica*, §§ 48, 49.

Il confronto di queste equazioni colle (1) del § 26 mostra che il risultante delle pressioni vincolari (reazione della superficie) è, ad ogni istante, normale alla superficie medesima, ed ha il punto vincolato del solido per proprio punto d'applicazione (cfr. Esempio I). Queste sono, nel caso in discorso, le proprietà caratteristiche delle pressioni vincolari.

Supposta la superficie fissa, le equazioni pure dell'equilibrio esprimono che il risultante delle forze impresse, in ogni posizione d'equilibrio del solido, è normale alla superficie resistente, ed ha il punto vincolato del solido per proprio punto d'applicazione (cfr. § 46).

Nel caso che la superficie sia sferica, il solido si dice anche riunito ad un punto — il centro della sfera — per un suo punto determinato, mediante una verghetta, o un filo teso, rappresentati dal raggio della sfera terminato a questo punto.

E si vede che, nello stesso caso, le condizioni caratteristiche delle pressioni vincolari si riducono a queste, che il risultante di esse (trazione della verghetta o del filo teso) abbia la direzione del raggio terminato al punto, cioè della verghetta o del filo teso, e lo stesso punto per proprio punto d' applicazione.

Esempio III (§ 17). -- Equazione pura del movimento è

$$\int_\tau k\left\{A\left[(y-y^*)\frac{d^2z}{dt^2}-(z-z^*)\frac{d^2y}{dt^2}\right]+\right.$$
$$+B\left[(z-z^*)\frac{d^2x}{dt^2}-(x-x^*)\frac{d^2z}{dt^2}\right]+$$
$$\left.+C\left[(x-x^*)\frac{d^2y}{dt^2}-(y-y^*)\frac{d^2x}{dt^2}\right]\right\}d\tau=$$
$$=A\,\mathrm{L}^*+B\,\mathrm{M}^*+C\,\mathrm{N}^*.$$

Riesce nullo, ad ogni istante, il momento delle pressioni vincolari rispetto alla retta vincolata, nella posizione che le compete ad ogni istante — vale a dire, il momento delle pressioni vincolari rispetto ad un punto qualunque della retta vincolata, come polo, è perpendicolare alla retta nella posizione medesima.

E supposta la retta fissa, l'equazione pura d'equilibrio esprime che il momento delle forze impresse, in ogni posizione d'equilibrio del solido, rispetto alla retta fissa, è nullo, cioè il momento

delle forze impresse rispetto ad un punto qualunque della retta fissa, come polo, è perpendicolare alla retta (cfr. § 46).

Esempio IV (§ 18). — Inteso che $A', B', C', A'', B'', C''$ siano collegati con A, B, C, coseni di direzione della perpendicolare al piano, presa in certo senso, dalle relazioni dell'Esempio II, per modo che rappresentino i coseni di direzione di due assi paralleli al piano e perpendicolari fra loro, sistema di equazioni pure del movimento è

$$\int_\tau k\left(A' \frac{d^2x}{dt^2} + B' \frac{d^2y}{dt^2} + C' \frac{d^2z}{dt^2}\right) d\tau = A' \mathrm{X} + B' \mathrm{Y} + C' \mathrm{Z},$$

$$\int_\tau k\left(A'' \frac{d^2x}{dt^2} + B'' \frac{d^2y}{dt^2} + C'' \frac{d^2z}{dt^2}\right) d\tau = A'' \mathrm{X} + B'' \mathrm{Y} + C'' \mathrm{Z},$$

$$\int_\tau k \left\{ A\left[(y - y^*) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z - z^*) \frac{d^2 y}{dt^2}\right] + \right.$$

$$+ B\left[(z - z^*) \frac{d^2 x}{dt^2} - (x - x^*) \frac{d^2 z}{dt^2}\right] +$$

$$\left. + C\left[(x - x^*) \frac{d^2 y}{dt^2} - (y - y^*) \frac{d^2 x}{dt^2}\right]\right\} d\tau =$$

$$= A \mathrm{L}^* + B \mathrm{M}^* + C \mathrm{N}^*.$$

Il risultante delle pressioni vincolari (reazione del piano resistente), riesce perpendicolare al piano, e il loro momento rispetto al punto di contatto del contorno del solido col piano, ad ogni istante, parallelo al piano medesimo.

Supposto il piano fisso, le equazioni pure dell'equilibrio esprimono che, in ogni posizione d'equilibrio del solido, il risultante delle forze impresse è perpendicolare al piano, e il loro momento rispetto al punto a contatto, parallelo ad esso (cfr. § 46).

Esempio V (§ 19). — Col significato dei simboli del precedente Esempio, sistema di equazioni pure riesce quello che sta scritto per l'Esempio II.

Il risultante delle pressioni vincolari (reazione del piano resistente), ad ogni istante, è perpendicolare al piano, e applicato al punto del contorno del solido, che funge, al considerato istante, da punto di contatto.

Supposto il piano fisso, le equazioni pure dell'equilibrio esprimono che, in ogni posizione d'equilibrio del solido, il risultante delle forze impresse è perpendicolare al piano, ed ha il punto a contatto per punto d'applicazione (cfr. § 46).

Esempio VI (§ 20). — Sistema di equazioni pure si riduce l'insieme delle tre ultime equazioni del precedente esempio: e le condizioni caratteristiche delle pressioni vincolari si riducono, per conseguenza, a quella che, ad ogni istante, il risultante delle medesime (reazione del piano resistente) ha il punto di contatto del contorno del solido col piano per proprio punto d'applicazione.

Non vi è luogo a discorrere dell'equilibrio.

Osservazione. — Questi esempii concreti sono atti a convalidare l'asserto, fatto a suo luogo (§ 27), che, grazie ai relativi postulati generali, le pressioni vincolari riescono, in una quantità di casi, esplicitamente conformi al loro ufficio di tradurre l'effetto dei vincoli supposti.

È poi questione di fatto che i movimenti così determinati riescono immagine sufficientemente fedele di movimenti naturali, realizzabili, in opportune condizioni, dall'esperienza.

Metodo dei coefficienti indeterminati per la formazione delle equazioni pure del movimento - Prima forma delle equazioni di Lagrange.

§ 48. — Moltiplichiamo le equazioni [(2) del § 22], che definiscono l'atto di movimento virtuale,

$$\Sigma (L_i l' + \cdots + P_i p' + \cdots) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots \mu)$$

per altrettanti coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$, che ci riserbiamo di determinare in seguito, e sottraggiamole, così moltiplicate, dall'equazione di d'Alembert e Lagrange [(1) del § 27]

$$\Sigma \left\{ l' \left(\int_\tau k \frac{d^2x}{dt^2} d\tau - X \right) + \cdots + \right.$$
$$\left. + p' \left(\int_\tau k \left[(y-b) \frac{d^2z}{dt^2} - (z-c) \frac{d^2y}{dt^2} \right] d\tau - L \right) + \cdots \right\} = 0.$$

Il coefficiente di l' risulterà

$$\int_\tau k \frac{d^2x}{dt^2} d\tau - X - \sum_{i=1}^{i=\mu} \lambda_i L_i,$$

quello di p'

$$\int_\tau k \left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right] d\tau - L - \sum_{i=1}^{i=\mu} \lambda_i P_i,$$

e da questi modelli si formeranno gli altri.

Determiniamo i μ moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ così che μ di questi coefficienti riescano nulli: ciò che, nelle nostre ipotesi, è possibile, perchè si tratta di formare un sistema di μ equazioni lineari non omogenee nelle $\lambda_1, \ldots \lambda_\mu$, il cui determinante, appartenendo alla matrice delle $L_i, \ldots P_i, \ldots$, che è supposta aver caratteristica μ (§ 14), scegliendole, se occorre, opportunamente, non sarà nullo.

Con ciò, l'ottenuta equazione si ridurrà alla somma dei rimanenti $\nu-\mu$ coefficienti, moltiplicati, ciascuno, pel relativo parametro. E questi $\nu-\mu$ parametri essendo suscettibili di valori affatto arbitrarii e indipendenti, dovranno i loro coefficienti essere tutti separatamente nulli.

Così, riunendo le equazioni precedentemente stabilite, per determinare le λ, colle ultime così dedotte, otteniamo le sestuple, in numero eguale a quello dei corpi,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\tau k \frac{d^2x}{dt^2} d\tau = X + \Sigma' L_i \lambda_i \\
&\int_\tau k \frac{d^2y}{dt^2} d\tau = Y + \Sigma' M_i \lambda_i \\
&\int_\tau k \frac{d^2z}{dt^2} d\tau = Z + \Sigma' N_i \lambda_i \\
&\int_\tau k \left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right] d\tau = L + \Sigma' P_i \lambda_i \\
&\int_\tau k \left[(z-c)\frac{d^2x}{dt^2} - (x-a)\frac{d^2z}{dt^2}\right] d\tau = M + \Sigma' Q_i \lambda_i \\
&\int_\tau k \left[(x-a)\frac{d^2y}{dt^2} - (y-b)\frac{d^2x}{dt^2}\right] d\tau = N + \Sigma' R_i \lambda_i
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove si è posto per brevità Σ' in luogo di $\sum_{i=1}^{i=\mu}$.

Queste sono un'estensione al sistema di corpi rigidi della così detta « prima forma delle equazioni di Lagrange » pel movimento di un sistema di punti.

Le chiameremo perciò senz'altro « prima forma delle equazioni del movimento di Lagrange ».

Da queste ν equazioni si ricaverà un sistema di $\nu - \mu$ equazioni pure, eliminando fra esse le λ, ciò che, per quanto si è veduto, e si deduce dall'ipotesi che μ sia la caratteristica della matrice formata coi coefficienti $L_i, \ldots P_i, \ldots (i = 1, 2, \ldots \mu)$, è certamente possibile.

§ 49. — Le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ servono poi pel calcolo degli elementi relativi alle pressioni vincolari: poichè, confrontando le ultime equazioni colle (1) del § 26, ne scaturisce

$$\left.\begin{array}{lll} X' = \Sigma' L_i \lambda_i, & Y' = \Sigma' M_i \lambda_i, & Z' = \Sigma' N_i \lambda_i \\ L' = \Sigma' P_i \lambda_i, & M' = \Sigma' Q_i \lambda_i, & N' = \Sigma' R_i \lambda_i . \end{array}\right\} (1)$$

Esempii.

§ 50. — Diamo un esempio con un caso di cinque equazioni traducenti il vincolo, ed un altro di un'equazione unica, ossia di altrettante equazioni, che, in un caso e nell'altro, definiscono l'atto di movimento virtuale.

[Esempio III (cfr. §§ 17, 24)]. Equazioni che determinano l'atto di movimento virtuale sono, in questo caso, le cinque seguenti

$$\begin{aligned} l' + q'(z^* - c) - r'(y^* - b) &= 0 \\ m' + r'(x^* - a) - p'(z^* - c) &= 0 \\ n' + p'(y^* - b) - q'(x^* - a) &= 0 \\ Cq' - Br' &= 0 \\ Ar' - Cp' &= 0. \end{aligned}$$

E con questo la prima forma delle equazioni del movimento di Lagrange diventa

$$\int_\tau k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = X + \lambda_1, \qquad \int_\tau k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau = Y + \lambda_2, \qquad \int_\tau k \frac{d^2 z}{dt^2} d\tau = Z + \lambda_3$$

$$\int_\tau k \left[(y^* - b) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z^* - c) \frac{d^2 y}{dt^2} \right] d\tau = L + (y^* - b)\lambda_3 - (z^* - c)\lambda_2 - C\lambda_5$$

$$\int_\tau k \left[(z^* - c) \frac{d^2 x}{dt^2} - (x^* - a) \frac{d^2 z}{dt^2} \right] d\tau = M + (z^* - c)\lambda_1 - (x^* - a)\lambda_3 + C\lambda_4$$

$$\int_\tau k \left[(x^* - a) \frac{d^2 y}{dt^2} - (y^* - b) \frac{d^2 x}{dt^2} \right] d\tau = N + (x^* - a)\lambda_2 - (y^* - b)\lambda_1 + A\lambda_5 - B\lambda_4$$

Ricavando λ_1, λ_2, λ_3 dalle prime tre, $C\lambda_4$, $C\lambda_5$ dalla quinta e dalla quarta, e introducendo le espressioni delle medesime così trovate nella sesta, previamente moltiplicata per C, si trova l'unica equazione pura del movimento, che riesce immediatamente la stessa trovata nel § 47.

Conformemente poi alle (1) del § 49, il sistema delle pressioni vincolari apparisce composto di due, l'uno avente per risultante $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, e il punto vincolato (x^*, y^*, z^*) per punto d'applicazione del medesimo, l'altro avente risultante nullo e momento $(-C\lambda_5, C\lambda_4, A\lambda_5 - B\lambda_4)$ perpendicolare alla direzione della retta vincolata, cui appartiene il suddetto punto.

[Esempio IV (cfr. §§ 19, 24)]. Equazione che definisce l'atto di movimento virtuale è in questo caso

$$\begin{aligned} & A l' + B m' + C n' \\ & + [(y^* - b) C - (z^* - c) B] p' + \\ & + [(z^* - c) A - (x^* - a) C] q' + \\ & + [(x^* - a) B - (y^* - b) A] r' = 0. \end{aligned}$$

Quindi la prima forma delle equazioni del movimento di Lagrange riesce

$$\int_\tau k\frac{d^2x}{dt^2}d\tau = X + A\lambda,\quad \int_\tau k\frac{d^2y}{dt^2}d\tau = Y + B\lambda,\quad \int_\tau k\frac{d^2z}{dt^2}d\tau = Z + C\lambda$$

$$\int_\tau k\left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right]d\tau = L + [(y^*-b)C - (z^*-c)B]\lambda$$

$$\int_\tau k\left[(z-c)\frac{d^2x}{dt^2} - (x-a)\frac{d^2z}{dt^2}\right]d\tau = M + [(z^*-c)A - (x^*-a)C]\lambda$$

$$\int_\tau k\left[(x-a)\frac{d^2y}{dt^2} - (y-b)\frac{d^2x}{dt^2}\right]d\tau = N + [(x^*-a)B - (y^*-b)A]\lambda.$$

Da queste equazioni si ricavano immediatamente le cinque equazioni pure trovate nel § 47, moltiplicando le prime tre per A', B', C', poi per A'', B'', C'', e ciascuna volta sommando, con che si ottengono le prime due, mentre le tre rimanenti si hanno ricavando dalle prime tre delle trovate equazioni di Lagrange $A\lambda$, $B\lambda$, $C\lambda$, e sostituendone le espressioni nelle rimanenti di esse.

Inoltre le equazioni (1) del § 49 diventano

$$X' = A\lambda,\quad Y' = B\lambda,\quad Z' = C\lambda$$
$$L' = [(y^* - \beta)C - (z^* - \gamma)B]\lambda$$
$$M' = [(z^* - \gamma)A - (x^* - \alpha)C]\lambda$$
$$N' = [(x^* - \alpha)B - (y^* - \beta)A]\lambda:$$

esprimenti che il sistema delle pressioni vincolari è rappresentato da un risultante perpendicolare, ad ogni istante, al piano, nella posizione che gli compete a questo istante, e applicato al punto che funge, all'istante medesimo, da punto di contatto tra il contorno del solido e il piano *.

* Avvertiamo la semplificazione delle formole che si conseguisce coll'assumere il punto di contatto (x^*, y^*, z^*) per punto (a, b, c).

Espressione degli elementi relativi alle pressioni vincolari in funzione del tempo, della posizione e dell'atto di movimento.

§ 51. — Gli elementi relativi alle pressioni vincolari X', Y', Z', L', M', N', riescono, per le (1) del § 49, funzioni lineari omogenee dei parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$, i cui coefficienti sono funzioni date, in generale, del tempo, delle coordinate del sistema, e dei loro coefficienti differenziali rispetto al tempo.

Mostriamo ora come le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ si possano determinare così da risultare funzioni degli elementi X, Y, Z, L, M, N delle forze impresse, oltre di che delle suddette variabili, per modo che, inteso che questi elementi delle forze impresse siano, in generale, funzioni delle variabili medesime — tempo, coordinate del sistema, e loro coefficienti differenziali rispetto al tempo — la stessa proprietà appartiene agli elementi delle pressioni vincolari, le quali, per conseguenza, risultano *a posteriori* omogenee colle forze impresse.

Perciò, assumiamo per (a, b, c) il centro di massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del relativo corpo, e, in questa ipotesi, poniamo le equazioni (1) del § 48 sotto la forma *

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= \frac{\mathrm{X} + \Sigma' L_i \lambda_i}{M} \\
\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} &= \frac{\mathrm{Y} + \Sigma' M_i \lambda_i}{M} \\
\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} &= \frac{\mathrm{Z} + \Sigma' N_i \lambda_i}{M} \\
\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= \frac{Q-R}{P}\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \frac{\bar{\mathfrak{L}} + \Sigma' \mathfrak{P}_i \lambda_i}{P} \\
\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \frac{R-P}{Q}\mathfrak{r}\mathfrak{p} + \frac{\bar{\mathfrak{M}} + \Sigma' \mathfrak{Q}_i \lambda_i}{Q} \\
\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \frac{P-Q}{R}\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \frac{\bar{\mathfrak{N}} + \Sigma' \mathfrak{R}_i \lambda_i}{R}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

* Cfr. § 10.

dove

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_i &= P_i\alpha_1 + Q_i\beta_1 + R_i\gamma_1\\ \mathfrak{Q}_i &= P_i\alpha_2 + Q_i\beta_2 + R_i\gamma_2\\ \mathfrak{R}_i &= P_i\alpha_3 + Q_i\beta_3 + R_i\gamma_3,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

e gli altri simboli conservano il noto significato.

Poniamo poi le equazioni traducenti i vincoli, conformemente all'*Osservazione* del § 14, e alle precedenti relazioni (2), sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\left(L_j\frac{d\bar{x}}{dt} + M_j\frac{d\bar{y}}{dt} + N_j\frac{d\bar{z}}{dt} + \mathfrak{P}_j\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}_j\mathfrak{q} + \mathfrak{R}_j\mathfrak{r}\right) = T_j\\ (j = 1, 2, \ldots \mu).\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Otteniamo così μ equazioni lineari nelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$, che serviranno per esprimerle in termini dei rimanenti elementi, moltiplicando le sei equazioni (1) per L_j, M_j, N_j, $\mathfrak{P}_j$, $\mathfrak{Q}_j$, $\mathfrak{R}_j$, rispettivamente, sommando le sestuple relative a tutti i corpi, e facendo poi successivamente $j = 1, 2, \ldots \mu$.

Ora, derivando rispetto al tempo le (3), se ne ricava

$$\Sigma\left(L_j\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \ldots + \mathfrak{P}_j\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \ldots\right)$$

$$+\Sigma\left(\dot{L}_j\frac{d\bar{x}}{dt} + \ldots + \dot{\mathfrak{P}}_j\,\mathfrak{p} + \ldots\right) = \dot{T}_j; \qquad (j = 1, 2, \ldots \mu)$$

e perciò il primo membro dell'equazione relativa al valor generico j, così ottenuta, può porsi sotto la forma

$$\dot{T}_j - \Sigma\left(\dot{L}_j\frac{d\bar{x}}{dt} + \ldots + \dot{\mathfrak{P}}_j\mathfrak{p}\ldots\right),$$

con che le derivate seconde delle coordinate si eliminano dal suddetto sistema.

Se ne conclude che il risultante e il momento rispetto ad un polo qualunque del sistema delle pressioni vincolari applicato ad ogni corpo sono funzioni degli stessi elementi relativi alle

forze impresse e del tempo, delle coordinate e delle loro derivate prime rispetto al tempo. *C. V. D.*

Osservazione. — L'espressione degli elementi delle pressioni vincolari in termini delle forze impresse, della posizione e dell'atto di movimento costituisce quel problema che si chiama la determinazione della reazione dei vincoli. Che se si pensa che i vincoli traducono in generale l'appoggio del mobile a certi sostegni (cfr. §§ 59, 60), si riconosce come con questo si determini l'azione di questi sostegni, non solo, ma altresì il cimento a cui sono assoggettati i sostegni medesimi, in conseguenza dell'appoggio del mobile. Il qual cimento si può considerare come eguale e di senso opposto alla suddetta azione — anzi il termine reazione dei vincoli esprime puramente questo concetto — e, per conseguenza, definito dagli stessi elementi, presi con segno contrario.

È manifesta l'importanza di questa ricerca pel confronto dei risultati del calcolo coll'esperienza. Poichè sta il fatto che sostegni materiali non possono sostenere cimenti che oltrepassano un certo limite. Donde segue che l'espressione degli elementi del cimento dei sostegni, nei singoli casi, permette di formare delle disuguaglianze, che debbono essere rispettate perchè il movimento di un modello materiale concordi col movimento calcolato.

Così, nel quarto, quinto e sesto esempio (§§ 18, 19, 20) la grandezza del risultante delle pressioni vincolari non dovrà superare un valore coordinato al « limite di resistenza alla frattura » del materiale di cui si concepisce composto il sostegno al cui contorno appartiene il piano: oltre di che, se questo materiale si suppone fornito di resistenza alla penetrazione, ma non al distacco, il componente secondo la normale dovrà volgere dalla parte dove si trova il mobile.

Nel caso del solido riunito per un punto ad un punto fisso mediante una verghetta (§ 16), occorrerà che il risultante delle pressioni vincolari non superi un valore coordinato al « limite di resistenza alla rottura » del materiale di cui s' immagina composta la verghetta: che se il vincolo s'immagina stabilito mediante un filo, occorrerà inoltre che il filo si mantenga teso, e cioè che il senso dello stesso risultante sia quello che volge dal punto vincolato al punto fisso.

Seconda forma delle equazioni del movimento di Lagrange.

§ 52. — Mostriamo come nel caso speciale, ma molto ampio e importante, del sistema olonomo, si possano porre le equazioni (5) del § 30 — che rappresentano il sistema delle equazioni pure del movimento, nel caso più generale — sotto una forma notevolissima per la sua concisione e pel significato degli elementi che vi figurano, riservandoci di svilupparne in seguito le applicazioni generali e rilevarne l'importanza.

Rappresentino, come precedentemente, x, y, z le coordinate ordinarie del punto generico del sistema, e supposto λ il numero dei gradi di libertà, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ una specie di coordinate libere del medesimo sistema. Le x, y, z risulteranno, in generale, altrettante funzioni delle $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ e di t. Quindi

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}+\Sigma'\frac{\partial x}{\partial \eta}\dot{\eta},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}+\Sigma'\frac{\partial y}{\partial \eta}\dot{\eta},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\Sigma'\frac{\partial z}{\partial \eta}\dot{\eta} \qquad (1)$$

dove la sommatoria è estesa agli indici delle η, e $\dot{\eta}=\frac{d\eta}{dt}$. Mentre, per la relazione generale stabilita fra $\frac{d}{dt}$ e δ (§), si avrà

$$\delta x=\Sigma'\frac{\partial x}{\partial \eta}\delta\eta,\qquad \delta y=\Sigma'\frac{\partial y}{\partial \eta}\delta\eta,\qquad \delta z=\Sigma'\frac{\partial z}{\partial \eta}\delta\eta, \qquad (2)$$

nelle quali formole $\delta\eta_1, \delta\eta_2, \ldots \delta\eta_\lambda$ rappresentano parametri indipendenti e arbitrarii.

Le $l', \ldots p', \ldots$ riusciranno, alla loro volta, funzioni lineari omogenee di questi parametri, conformemente ai supposti vincoli, così da poter assumere i parametri medesimi per coefficienti ε delle (1) del § 23. Difatti, esse si esprimono in tal modo per mezzo delle $\delta\xi$ (§ 22), e queste per mezzo delle $\delta\eta$, in virtù di relazioni conformi ai vincoli, analoghe alle (2). Poniamo, con ciò,

$$l'=\Sigma' E^{(l')}\delta\eta,\quad \ldots\qquad p'=\Sigma' E^{(p')}\delta\eta,\quad \ldots \qquad (3)$$

Se introduciamo queste posizioni nelle

$$\begin{aligned}\dot x &= l + q(z-c) - r(y-b)\\ \dot y &= m + r(x-a) - p(z-c)\\ \dot z &= n + p(y-b) - q(x-a)\end{aligned}$$

[(1) del § 22]. Confrontando il risultato di tale operazione colle (2), e considerando le (1) otteniamo immediatamente

$$\left.\begin{aligned}E^{(l)} + E^{(q)}(z-c) - E^{(r)}(y-b) &= \frac{\partial x}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \dot\chi}\frac{dx}{dt}\\ E^{(m)} + E^{(r)}(x-a) - E^{(p)}(z-c) &= \frac{\partial y}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \dot\chi}\frac{dy}{dt}\\ E^{(n)} + E^{(p)}(y-b) - E^{(q)}(x-a) &= \frac{\partial z}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \dot\chi}\frac{dz}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

dove le E e χ si debbono immaginare fornite del medesimo indice, sottinteso per brevità.

Ora, abbiamo, per ciascun indice delle χ, l'equazione pura (§ 30), dove la sommatoria è estesa ai singoli corpi,

$$\Sigma\Big\{E^{(l)}\Big(\int_\tau k\frac{d^2x}{dt^2}\,d\tau - X\Big) + \cdots$$
$$+ E^{(p)}\Big(\int_\tau k\Big[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\Big]d\tau - L\Big) + \cdots\Big\} = 0$$

ossia, scrivendo diversamente,

$$\Sigma\int_\tau k\Big\{\frac{d^2x}{dt^2}\Big[E^{(l)} + E^{(q)}(z-c) - E^{(r)}(y-b)\Big] + \cdots\Big\}d\tau =$$
$$= \Sigma\big(E^{(l)}X + \ldots + E^{(p)}L + \ldots\big)$$

Si tratta di trasformare questa equazione.

Perciò, cominciamo coll'osservare che, se, indicando con **Π**, come al § 28, la misura della potenza delle forze impresse, cor-

rispondente all'atto di movimento virtuale definito dalle (2), o dalle (3), si pone

$$\Pi = \Sigma' \Pi \, \delta \eta,$$

il secondo membro non è altro che il coefficiente Π del $\delta \eta$, fornito di quell'indice a cui corrisponde l'equazione. Ciò che si riconosce immediatamente, introducendo le (3) in

$$\Pi = \Sigma (X \, l' + \dots + L \, p' + \dots).$$

(cfr. § 11).

Per trasformare il primo, osserviamo intanto che, tenuto calcolo delle (4), si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \Sigma \int_\tau k \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \frac{dx}{dt} + \dots \right) d\tau - \Sigma \int_\tau k \left(\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \dots \right) d\tau$$

ed anche

$$\frac{d}{dt} \Sigma \int_\tau k \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \frac{dx}{dt} + \dots \right) d\tau - \Sigma \int_\tau k \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{dx}{dt} + \dots \right) d\tau,$$

poichè *

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{dx}{dt} . \tag{5}$$

* Difatti, inteso che, fissato η, percorra η' i valori $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\nu$, da

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \Sigma' \frac{\partial x}{\partial \eta'} \dot{\eta}'$$

si ricava

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \, \partial \eta} + \Sigma' \frac{\partial^2 x}{\partial \eta' \, \partial \eta} \dot{\eta}',$$

poichè, nel derivare parzialmente rispetto alle η, le $\dot{\eta}$ vanno considerate come variabili indipendenti. D'altra parte, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \, \partial \eta} + \Sigma' \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \, \partial \eta'} \dot{\eta}'.$$

e, risultando egu ... embri, termine a termine, riesce

'eguaglianza d

D'altra parte, indicando con T la grandezza della forza viva del mobile al considerato istante, si ha

$$T = \frac{1}{2} \Sigma \int k \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] d\tau.$$

Ne risulta senz'altro che l'espressione sotto $\frac{d}{dt}$ non è altro che $\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}$, e la parte rimanente dello stesso primo membro $\frac{\partial T}{\partial \eta}$.

Si conclude quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta} = \Pi : \tag{6}$$

che è la forma dell'equazione pura del movimento, che ci eravamo proposti di ottenere.

Queste equazioni, in numero eguale a quello dei gradi di libertà del sistema, cioè tante quante sono le η, servono per determinare le stesse coordinate libere in funzione del tempo, col concorso dei dati iniziali: e costituiscono la così detta « seconda forma delle equazioni del movimento di Lagrange ».

Nel caso che le forze impresse ammettano potenziale, W, sarà (§ 44)

$$\Pi = \frac{\partial W}{\partial \eta},$$

e le precedenti equazioni si potranno scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta}. \tag{7}$$

Osservazione. — Notiamo come la formazione dei primi membri delle precedenti equazioni si riduca al calcolo dell'espressione della forza viva del sistema, corrispondente all'atto di movimento effettivo più generale, conforme ai supposti vincoli, mediante una certa specie di coordinate libere, e la formazione dei secondi membri, al calcolo dell'espressione della potenza

delle forze impresse per un sistema fondamentale di atti di movimento virtuali, corrispondenti all'ipotesi che varii successivamente una di dette coordinate libere, mentre le rimanenti si mantengono costanti.

Esempii.

[Esempio II (§ 16)]. Abbiasi un solido riunito per un punto ad un punto fisso mediante una verghetta, nel caso semplificato che lo studio del suo movimento possa ridursi a quello del movimento di un punto materiale definito dalla posizione del punto vincolato e dalla massa del solido. Questo è il così detto movimento di un punto materiale vincolato a mantenersi sopra una superficie sferica fissa.

Si hanno, con ciò, due gradi di libertà, e due coordinate libere sono la longitudine, φ, e la colatitudine, θ, del punto. Atto di movimento — effettivo o virtuale — più generale è quello che corrisponde all'ipotesi che, partendo dal posto all'istante considerato, il punto descriva una linea qualsivoglia appartenente alla superficie sferica; quindi, indicando con a il raggio,

$$T = \frac{1}{2} M a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2).$$

Un sistema fondamentale di atti di movimento virtuale, corrispondenti all'ipotesi che una, e poi l'altra, delle due coordinate non varii, è costituito dalle velocità del punto rispettivamente parallele alla tangente nel posto considerato al meridiano φ e al parallelo θ; e, indicando con $M\Theta$ e $M\Phi$ le componenti della forza impressa applicata al punto secondo le stesse tangenti volte nel senso in cui cresce θ e φ rispettivamente, corrispondono ad essi potenze della forza impressa medesima le cui misure sono rappresentate da

$$M\Theta\, a\, \delta\theta, \qquad M\Phi\, a \sin\theta\, \delta\varphi.$$

Quindi, per (6) del paragrafo precedente, sistema delle equazioni pure riesce

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} - a\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \Theta, \qquad a\frac{d\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}}{dt} = \sin\theta\,\Phi. \qquad (2)$$

§ 53. — [Esempio III (§ 17)]. Abbiasi ancora un solido vincolato ad avere una retta fissa. Si ha allora un sol grado di libertà, e coordinata libera è la misura φ dell'angolo di rotazione del solido, rispetto alla retta fissa, presa in un certo senso, come asse, e ad una certa posizione di riferimento. L'atto di movimento — effettivo o virtuale — è un atto di movimento rotatorio intorno alla retta fissa. Quindi, indicando con K la grandezza del momento d'inerzia del solido rispetto alla retta medesima,

$$T = \frac{1}{2} K \dot{\varphi}^2 .$$

E indicando con Φ la componente secondo la retta fissa, volta nel suddetto senso, del momento delle forze impresse rispetto ad un punto qualsivoglia della retta medesima, come polo, ossia la misura del momento delle forze impresse rispetto alla retta, assegnatagli, con quel senso, come asse, sarà

$$\Pi = \Phi \, \delta \varphi$$

la misura della potenza delle forze impresse corrispondente all'atto di movimento virtuale più generale.

Se ne conclude, per (6) del precedente §, l'equazione pura

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \Phi . \qquad (1)$$

Si riconosce, eseguendo il calcolo, come a questa equazione si riduca quella trovata nel § 47 (Esempio III), assumendo la retta vincolata, intesa fissa, presa in un certo senso, per asse delle x, e per punto x^*, y^*, z^*, prendendo l'origine: con che, indicando con φ la misura di un angolo di rotazione, per rispetto all'asse delle x, come asse, contato dal semipiano terminato all'asse delle x, contenente l'asse delle z positivo, si ha

$$x = \text{cost.}, \qquad y = -\rho \sin(\varphi + \alpha), \qquad z = \rho \cos(\varphi + \alpha)$$

$$K = \int_\tau k \rho^2 \, d\tau .$$

Concetto e applicazione del metodo precedente.

§ 54. — Fondamento del metodo, precedentemente esposto, per formare le equazioni del movimento, risulta l'equazione di d'Alembert e Lagrange; così chiamata, perchè Lagrange* raccolse in essa il teorema delle velocità virtuali (§ 37), che comprende la soluzione del problema più generale della statica, enunciato, per la prima volta, in tutta la sua generalità, da Giovanni Bernoulli**, e il teorema di d'Alembert (§ 46), col quale d'Alembert ricondusse a quel problema la formazione delle equazioni del movimento di un sistema di punti, comunque vincolati***.

Il principio delle velocità virtuali si può far risalire ai « Problemi meccanici» di Aristotele; il quale nello studio dell'equilibrio della leva, introduce il concetto della relativa mobilità dei punti d'applicazione delle forze, misurata dal raggio del cerchio descritto, in conseguenza d'uno spostamento della leva, dall'uno e dall'altro: per dedurne che gli effetti delle due forze si elideranno quando saranno eguali i prodotti dell'intensità di ciascuna per la mobilità del relativo punto d'applicazione****. Lo stesso principio fu applicato da Stevin all'equilibrio del polispasto, e da Galileo a quello del piano inclinato. L'enunciato generale di Giovanni Bernoulli deve intendersi dedotto per induzione dalla validità del principio nei casi fin allora esaminati, dimostrata, a seconda del caso, con appropriato ragionamento*****. I quali ragionamenti riescono, alla lor volta, più o meno vincolati alle condizioni dei relativi casi speciali: come alcune dimostrazioni generali, fondate sulla rappresentazione

---

* *Mécanique analytique - Dynamique. Seconde Section.*

** Senza dimostrazione, in una lettera del 1717 a Varignon; per cui V. *Varignon: Nouvelle Mécanique* (1725). *Section IX.*

*** *Traité de Dynamique* (1743).

**** Cfr. *Vailati: Il principio dei lavori virtuali da Aristotele ad Erone d'Alessandria.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896-1897.

***** A questo concetto è informata la dimostrazione di Varignon (op. cit.).

delle forze per mezzo di un meccanismo (per esempio, la dimostrazione di Lagrange, per mezzo di un sistema di carrucole) appariscono parimente subordinate alle condizioni del meccanismo medesimo*.

Il ragionamento tenuto da d'Alembert, per dimostrare il celebre teorema che porta il suo nome, consiste, in sostanza, in questo che il sistema delle forze impresse, e quello delle forze effettive, rappresentate, per ogni punto materiale componente il mobile considerato, dal prodotto della massa per l'accelerazione del punto medesimo, riescono equipollenti, in quanto che il primo produce quel movimento stesso, che *a priori* è determinato dal secondo. Questo ragionamento è tuttora riprodotto in molte esposizioni della Meccanica Razionale. Ma certamente vi si può objettare che le forze impresse producono il movimento in discorso col concorso dei supposti vincoli, mentre, soltanto facendo astrazione da questi, si può affermare che le forze effettive determinino lo stesso movimento.

Col procedimento da noi seguito, l'equazione di d'Alembert e Lagrange scaturisce dalle equazioni cardinali del movimento, in virtù dei due *postulati*, che i vincoli si possano sostituire con un sistema di pressioni, e che queste pressioni siano caratterizzate dall'annullarsi della loro potenza complessiva, per ogni atto di movimento virtuale (§§ 26, 27).

Allora, pur di supporre le forze impresse date funzioni del tempo, della posizione e dell'atto di movimento del sistema, ne viene determinato — salvo il concorso della posizione e dell'atto di movimento ad un istante — per ogni specie di vincoli, il movimento del sistema.

E noi ci riserviamo di valutare a *posteriori* l'applicabilità delle nostre deduzioni matematiche allo studio dei movimenti rilevati dall'esperienza, verificando, se, e fra quali limiti, è possibile ricavare dalle leggi di natura tali forze impresse che il movimento *calcolato* in base ad esse collimi col movimento *osservato* dall'esperienza, vale a dire che le proprietà del primo si prestino ad una soddisfacente interpretazione delle circostanze del secondo.

È questione di fatto che ciò riesce in tanti casi, e con tanta

* Cfr. *Mach: Die Mechanick in ihrer Entwickelung dargestellt, Erstes Kapitel.* Leipzig, 1901.

approssimazione, da risultarne accertata quella che potremo chiamare realtà fisica dell'esposta teoria matematica del movimento*.

Alcune applicazioni, con cui chiudiamo questa prima parte, sono specialmente destinate a provare tale asserto.

Varie specie di forze impresse.

§ 55. — *Gravità.* La vicinanza del Globo Terrestre introduce nel sistema delle forze impresse quel componente, che chiamasi delle forze di gravità (vera), ed è caratterizzato dalla circostanza che, in un campo sufficientemente limitato, la forza riesce sensibilmente costante: con che il risultante, rappresentato dal peso (vero), ammette il centro di massa per proprio punto d'applicazione. Un corpo che conta queste forze fra le forze impresse si dice un « grave ».

Nello studio del movimento relativo ad una terna d'assi invariabilmente unita al Globo — o, come si dice brevemente, movimento relativo al Globo — quando gli sia assegnato un tempo abbastanza ristretto, si può ordinariamente prescindere dalle forze apparenti del movimento relativo**.

§ 56. — *Azione degli astri.* Un astro, che si reputi intervenire sensibilmente nel determinare le condizioni del movimento, introduce, alla sua volta, un componente del sistema delle forze impresse, agevolmente determinabile, in funzione della posizione, mediante la legge elementare newtoniana***.

Anche l'azione degli stessi astri più vicini è da reputarsi come trascurabile, nella massima parte dei casi, per lo studio del movimento relativo al Globo Terrestre, entro limiti ristretti di spazio e di tempo.

§ 57. — *Azione gravifica, elettrica, magnetica di corpi speciali.* La particolare gravitazione verso un corpo in speciali rapporti di posizione col mobile, o l'azione elettrica o magnetica

* Cfr. *G. A. Maggi: Réflexions sur l'exposition des principes de la Mécanique Rationnelle.* (Enseignement Mathématique, Paris, 1901).

** *Meccanica,* §§ 249 e segg., §§ 340 e segg.

*** *Meccanica,* § 333.

corrispondenti a date distribuzioni di elettricità e di magnetismo nel mobile considerato, e in un altro corpo, in presenza di esso, introduranno pure, all'occorrenza, un componente delle forze impresse, determinabile, in funzione della posizione, mediante le relative forze elementari.

Quando si verifichi il contatto, queste forze impresse rappresenteranno quella parte dell'azione del corpo che risponde alla definizione della forza limite *.

Tale particolare contributo della gravitazione universale è di regola trascurabile. Mentre lo stato elettrico e magnetico non sono ordinariamente considerati nei problemi di Meccanica Razionale.

§ 58. — *Resistenza di un mezzo fluido.* L'ipotesi della presenza di un mezzo fluido, per esempio dell'aria, quale condizione apprezzabile del movimento, assegna propriamente lo studio del movimento medesimo all'Idrodinamica**. Tuttavia, entro certi limiti, si può tener conto dell'azione dell'aria, o d'altro mezzo analogo, coll'introdurre nelle forze impresse, oltre il sistema delle pressioni idrostatiche relativo al principio d'Archimede, un particolar sistema di pressioni, egualmente applicate ai punti del contorno del mobile: le così dette « pressioni di resistenza del mezzo ». Le quali si suppongono tali che, se la normale al contorno nel punto considerato, volta verso l'interno, forma colla velocità di questo punto un angolo acuto o retto, la pressione specifica applicata al punto è nulla, e diversamente, ha l'orientazione della normale volta verso l'interno, e grandezza rappresentata dal prodotto di una costante specifica del mezzo, di una potenza intera positiva della grandezza della velocità del punto, e della grandezza del coseno dell'angolo formato dalla normale con questa velocità.

Questa circostanza del movimento è trascurabile nell'ipotesi di piccole velocità e di ristretti intervalli di tempo. Diversamente, — per esempio, nei problemi della balistica — ha effetti assai considerevoli.

Giova poi tener presente, nel valutare, in questo caso, il confronto fra il movimento calcolato e il movimento osservato,

* *Meccanica*, §§ 379 e segg.

** Vedasi in proposito l'ingegnoso e felice saggio di *Levi Civita: Sulla resistenza dei mezzi fluidi* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1901).

che gli stessi principii della Meccanica Razionale provvedono, colla considerazione del movimento del fluido, ad una più fedele immagine del fatto sperimentale.

§ 59. — *Azione del contatto permanente - Pressioni di attrito.* La circostanza del contatto permanente della superficie di un solido con quella di un altro corpo si rappresenta, in primo luogo, per mezzo di un vincolo, traducibile in equazioni, al modo che abbiamo spiegato a suo luogo (§§ 12-20). Così, il vincolo di un punto fisso rappresenta la circostanza che una cavità sferica si applichi ad una sfera fissa, d'egual raggio, estremamente piccolo, oppure che il contorno con una punta assai acuta si appoggi, in un punto fisso, sopra una superficie: il vincolo di una retta fissa, quella che una cavità in forma di cilindro circolare sia riempita da un egual cilindro fisso, di raggio piccolissimo, ovvero che il contorno si appoggi con uno spigolo tagliente, o con due punte acute, come la precedente, o giri in qualche modo sopra due cardini equiparabili a punti fissi: il vincolo del contatto con un piano rappresenta la circostanza che il solido si appoggi ad una faccia piana del contorno di un corpo, che se è supposto strisciare senza rotolare, si deve intendere che vi si applichi con una piccola area piana: il vincolo del punto vincolato a mantenersi sopra una superficie rappresenta infine la circostanza che una punta acuta del contorno del mobile si appoggi al contorno di un corpo, avente la forma di quella superficie, libera di muoversi sopra di esso: e rientra nello stesso vincolo il caso di un solido riunito per un suo punto, mediante una verghetta rigida, o un filo teso, ad un punto fisso, o animato da un certo movimento.

Dallo stesso punto di vista, al quale è informato il nostro postulato che ogni vincolo sia traducibile con un sistema di pressioni — le pressioni vincolari — questo rappresenta un'azione del corpo a contatto col mobile considerato, che chiameremo, in generale, sostegno.

Ora, sta il fatto che, quando si verifichino certe qualità fisiche delle superficie appoggiate l'una all'altra, la rappresentazione del movimento osservato si può conseguire, con sufficiente fedeltà, senza introdurre un particolar sistema di forze impresse, che, in unione colle pressioni vincolari, traduca l'azione del contatto coi sostegni. Queste qualità, in generale, si riducono ad un certo grado di levigatezza delle superficie, e nel caso del

solido che rotola senza strisciare, ad un certo grado di ruvidità. Conformemente a ciò, il mobile matematico, il cui movimento si calcola senza l'aggiunta di un tal contributo alle forze impresse, si chiama, in generale, perfettamente liscio, e, nel caso indicato, perfettamente scabro *.

In altri casi, un accordo soddisfacente non può ottenersi che coll'aggiunta di un sistema di forze impresse, implicante i supposti vincoli, come il suddetto: queste sono le così dette « pressioni di attrito »; e il mobile matematico si dice, negli stessi casi, imperfettamente liscio, o scabro, o dotato di attrito.

Nell'ipotesi, particolarmente importante, che il contorno, tutto convesso, di un solido sia vincolato a toccare una superficie fissa, parimente tutta convessa (cfr. Esempii IV, V, VI, §§ 18-20) servono, colle debite limitazioni, le leggi seguenti, fondate principalmente sui risultati sperimentali di Coulomb e di Morin.

I Caso (Attrito cinetico). Gli indicati elementi dell'atto di movimento non sono tutti nulli, se non, per avventura, ad istanti isolati, dai quali, col canone della continuità, si può prescindere: che se uno di essi si mantiene nullo in un intervallo di tempo, riesce nullo, nello stesso intervallo, il relativo sistema di pressioni.

Le pressioni d'attrito si risolvono in tre sistemi:

1° (Attrito radente). Un sistema il cui risultante ha orientazione eguale e contraria a quella della velocità del punto a contatto, ha grandezza rappresentata dal prodotto di un coefficiente noto (coefficiente d'attrito radente) per la grandezza del risultante delle pressioni vincolari (reazione della superficie fissa), R', calcolata, introducendo i valori attuali delle variabili nell'espressione relativa al caso dell'attrito nullo (cfr. § 51), ed è applicato al punto a contatto.

2° (Attrito volvente). Un sistema il cui risultante è nullo, e il momento ha orientazione eguale ed opposta a quella del componente secondo il piano tangente nel punto a contatto della velocità angolare, e grandezza rappresentata dal prodotto di un coefficiente (coefficiente di attrito volvente) per R'.

---

* Cfr. *C. Neumann: Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik der starren Körper*, §§ 16, 17, (Berichte über die Verhandlungen der K. Sachs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1889).

3° (Attrito girante). Un sistema che si definisce come il precedente rispetto al componente della velocità angolare secondo la normale al contorno nel punto a contatto, con un coefficiente diverso da quello (coefficiente di attrito girante).

Quest'ultimo coefficiente risulta assai piccolo rispetto al precedente, e questo rispetto al coefficiente d'attrito radente, per modo che, in una prima approssimazione, si può ridursi al primo sistema, vale a dire si può considerare il solo attrito radente.

II Caso (Attrito statico). L'atto di movimento del corpo è costantemente nullo.

Il risultante delle pressioni d'attrito ha orientazione eguale ed opposta, e grandezza eguale a quella del componente secondo il pian tangente nel punto a contatto delle rimanenti forze impresse, finchè la grandezza di questa componente non supera il prodotto della reazione della superficie fissa, R', pel coefficiente d'attrito radente (più esattamente per un coefficiente alquanto più grande), partendo dal qual termine, resta rappresentata da questo prodotto: oltre di che è applicata al punto a contatto.

In ogni caso, quando i punti a contatto siano più d'uno si applicano a ciascuno le leggi precedenti, assegnandogli un componente della reazione della superficie fissa, e nel II Caso del risultante delle forze impresse diverse dalle pressioni d'attrito, con criterii da stabilirsi nei singoli casi particolari *.

§ 60. — *Azione del contatto fuggevole - Pressioni impulsive.* Il caso che il contatto di due corpi duri un tempo così breve da riuscire inapprezzabile rientra nella teoria del movimento impulsivo, di cui sarà discorso, come complemento a questa parte, e, a proposito del movimento medesimo, si dirà delle pressioni impulsive, in particolare delle pressioni di urto, a cui giova ricorrere in questa ipotesi.

---

* Per un saggio di teoria generale cfr. *Painlevé: Leçons sur le frottement* (Paris, 1895), come anche *Leçons sur l'Intégration des Equations Différentielles de la Mécanique* (Paris, 1895).

Applicazione al movimento traslatorio di una sfera rigida omogenea, determinato dalla gravità e dalla resistenza del mezzo - Movimento di un projettile sferico nell'aria.

[Solido libero].

§ 61. — Gli elementi delle pressioni vincolari essendo nulli, le equazioni cardinali formano, per sè stesse, un sistema di equazioni pure (cfr. § 26).

Mostriamo, innanzi tutto, come l'ipotesi del movimento traslatorio sia conciliabile colle supposte forze impresse. Difatti, il risultante di queste riesce applicato al centro di massa, vale a dire al centro di figura, della sfera, perchè ciò si verifica separatamente pel risultante delle forze di gravità, corrispondenti a forze acceleratrici eguali e parallele (§ 55), e per quello delle pressioni di resistenza del mezzo, concorrenti nel centro di figura (§ 58). Quindi il movimento relativo al centro di massa verifica secondo ogni asse d'orientazione fissa il teorema della conservazione delle aree (§ 33), e riesce nullo, se, ad un istante è nullo il competente atto di movimento. Vale a dire, il movimento in discorso riuscirà traslatorio, purchè sia traslatorio l'atto di movimento iniziale.

Ciò premesso, assumiamo una terna d'assi, dei quali l'asse delle z sia volto verticalmente in basso, e indichiamo con x, y, z le coordinate del centro della sfera al tempo t, con M la grandezza della sua massa (o, per tener conto del principio di Archimede, la grandezza della differenza della stessa massa e quella di un egual volume d'aria, che supporremo, in ogni caso, minore), con X_n, Y_n, Z_n le componenti della pressione specifica di resistenza del mezzo nei punti del suo contorno, che indicheremo con σ. Basterà considerare le tre equazioni esprimenti il teorema del movimento del centro di massa,

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=\int_\sigma X_n d\sigma,\quad M\frac{d^2y}{dt^2}=\int_\sigma Y_n d\sigma,\quad M\frac{d^2z}{dt^2}=Mg+\int_\sigma Z_n d\sigma. \quad (1)$$

Ora concepito il contorno della sfera, mediante la sua intersezione col piano diametrale, perpendicolare alla velocità nel

supposto istante, decomposto nei due emisferi, σ_1 e σ_2, volto il primo dalla parte corrispondente al senso della velocità, e il secondo dalla parte opposta, sarà, su quest'ultimo,

$$X_n = 0, \qquad Y_n = 0, \qquad Z_n = 0,$$

e sul primo,

$$X_n = -\rho\, \mathrm{v}^\nu \cos i \cos(n\,x)$$

$$Y_n = -\rho\, \mathrm{v}^\nu \cos i \cos(n\,y)$$

$$Z_n = -\rho\, \mathrm{v}^\nu \cos i \cos(n\,z),$$

dove n indica il raggio, volto dal punto considerato verso il centro, $\cos i$ il coseno dell'angolo da esso formato colla velocità, v la grandezza di questa, ρ e ν, ciascuna, una costante positiva, per modo che, riuscendo $\cos i$ nullo o negativo,

$$-\rho\, \mathrm{v}^\nu \cos i$$

rappresenta la grandezza della pressione specifica in discorso, nel punto medesimo (§ 58).

D'altra parte,

$$\cos i = \frac{1}{\mathrm{v}} \left(\frac{dx}{dt} \cos(n\,x) + \frac{dy}{dt} \cos(n\,y) + \frac{dz}{dt} \cos(n\,z) \right).$$

E, richiamando il noto teorema di Gauss

$$\int_\tau \frac{\partial f}{\partial u}\, d\tau = -\int_\sigma f \cos(n\,u)\, d\sigma,$$

dove σ indica il contorno dello spazio τ, e n la normale volta all'interno, si ha, rappresentato con R il raggio della sfera, e, per un momento, con ξ, η, ζ le coordinate del suo punto generico, rispetto ad una terna d'assi coll'origine nel centro,

$$\int_{\sigma_1} \cos^2(nx)\, d\sigma_1 = \frac{1}{2}\int_{\sigma} \cos^2(nx)\, d\sigma = -\frac{1}{2}\frac{1}{R}\int_{\sigma} \xi \cos(nx)\, d\sigma = \frac{2}{3}\pi R^2$$

$$\int_{\sigma_1} \cos(nx)\cos(ny)\, d\sigma_1 = \frac{1}{2}\int_{\sigma} \cos(nx)\cos(ny)\, d\sigma = -\frac{1}{2}\frac{1}{R}\int_{\sigma} \xi \cos(ny)\, d\sigma = 0$$

$$\int_{\sigma_1} \cos(nx)\cos(nz)\, d\sigma_1 = \frac{1}{2}\int_{\sigma} \cos(nx)\cos(nz)\, d\sigma = -\frac{1}{2}\frac{1}{R}\int_{\sigma} \xi \cos(nz)\, d\sigma = 0.$$

Ne viene che, posto

$$\frac{2}{3}\pi R^2 \rho \frac{1}{M} = \varkappa, \tag{2}$$

le equazioni (1) possono scriversi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varkappa \mathrm{v}^{\nu-1}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varkappa \mathrm{v}^{\nu-1}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - \varkappa \mathrm{v}^{\nu-1}\frac{dz}{dt}.$$

Le quali sono le ben note equazioni del movimento di un punto materiale in un mezzo resistente *: movimento determinato dalla gravità e da una forza acceleratrice di grandezza $\varkappa \mathrm{v}^{\nu}$, parallela e di senso opposto alla velocità.

Per richiamare brevemente le principali circostanze di questo movimento, osserviamo, innanzi tutto, che, riuscendo la forza acceleratrice composta del termine dovuto alla gravità, di grandezza g, coll'orientazione della verticale volta in basso, e del termine dovuto alla resistenza, di grandezza $\varkappa \mathrm{v}^{\nu}$, avente l'orientazione della tangente alla trajettoria, volta nel senso opposto al movimento, la trajettoria giacerà in un piano verticale. Difatti, per la proprietà generale che l'accelerazione riesce costantemente parallela al piano osculatore nel relativo punto della trajettoria **, ne risulta che questo piano deve mantenersi verticale, e, per conseguenza, invariabile, salvo il caso che la tan-

---

* V. p. es. *Appell: Traité de Mécanique, I* (Paris, 1893) § 220. Nella *Meccanica* (§§ 463, 464) abbiamo esposto il caso di $\nu = 1$.

** Per questa e le altre proprietà, richiamate in seguito, dell'accelerazione cfr. *Meccanica*, § 193.

gente si mantenga verticale, vale a dire che la trajettoria si riduca ad una retta verticale, in cui cessa di essere determinato. Sia la trajettoria contenuta nel piano $x z$; con ciò $y = 0$, e le precedenti equazioni si riducono alla prima e alla terza. Ora, escluso per un momento il caso che sia costantemente $\frac{dx}{dt} = 0$, per riguardarlo come caso limite, la prima equazione ci dà

$$\frac{d}{dt} \log \frac{dx}{dt} = - \varkappa \, v^{\nu - 1} .$$

Donde segue che $\frac{dx}{dt}$ è costantemente decrescente, e, per conseguenza, la velocità costantemente volta in un senso, ossia il movimento progressivo. D'altra parte, l'accelerazione normale si riduce alla componente normale dell'accelerazione di gravità, il cui senso riesce quello che volge al di sotto della orizzontale descritta pel punto; per modo che da questa parte si troverà il centro di curvatura della trajettoria, corrispondente allo stesso punto, ossia la trajettoria volgerà costantemente in basso la sua concavità.

Ciò premesso, indichi α la misura dell'angolo che la tangente alla trajettoria, volta nel senso della velocità, forma colla verticale volta in basso: il quale, per l'ultima delle suddette circostanze, decrescerà col procedere sulla trajettoria nel senso del movimento, cioè col crescere del tempo. Avremo, indicando con r la grandezza del raggio di curvatura, le due equazioni intrinseche

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \alpha - \varkappa \, v^{\nu}, \qquad \frac{v^2}{r} = g \sin \alpha,$$

cui va aggiunta, indicando con s la misura dell'arco di trajettoria, inteso crescente con t,

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\alpha}{ds} = - \frac{1}{v} \frac{d\alpha}{dt} .$$

Da questa e dalla seconda si ricava

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{v}{r} = - \frac{g \sin \alpha}{v} : \qquad (3)$$

e da quest' ultima, in unione colla prima, scrivendo in modo opportuno,

$$\frac{d\frac{1}{v^\nu}}{d\alpha} - \frac{\nu \cot\alpha}{v^\nu} + \frac{\varkappa\nu}{g \sin\alpha} = 0 \qquad (4)$$

equazione lineare, del 1° ordine, in $\frac{1}{v^\nu}$ atta a determinare lo stesso $\frac{1}{v^\nu}$, e quindi v, in funzione di α, per mezzo di semplici quadrature, col concorso del valore di v per un certo valore di α, vale a dire col concorso della grandezza e dell'orientazione della velocità ad un istante particolare qualsivoglia, che, pel momento, non occorre precisare.

Concepito, in tal modo, determinato v in funzione di α, la (3) fornisce

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\, d\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (5)$$

la quale lega t con α, per modo da potersene ricavare anche α in funzione di t. Oltre di che da

$$\frac{dx}{dt} = v \sin\alpha, \qquad \frac{dz}{dt} = v \cos\alpha,$$

grazie alla stessa (3), si ricava

$$x = x_0 - \frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\, d\alpha, \qquad z = z_0 - \frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \cot\alpha\, d\alpha. \qquad (6)$$

La (4), posta sotto la forma

$$\sin\alpha \frac{d\frac{1}{v^\nu}}{d\alpha} - \frac{\nu\cos\alpha}{v^\nu} + \frac{\varkappa\nu}{g} = 0,$$

suggerisce

$$\lim_{\alpha=0} \frac{1}{v^2} = \frac{\alpha}{g}, \qquad \lim_{\alpha=0} v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}},$$

risultato che si verifica agevolmente sulla formola d'integrazione: con che la grandezza, v, della velocità, col tendere di α a o, tende al limite finito $\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$.

D'altra parte, tenendo conto di questo risultato, e di

$$\lim_{\alpha=0} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = -\infty,$$

si deduce da (5)

$$\lim_{\alpha=0} t = \infty;$$

per modo che l'angolo α a o, e la grandezza v della velocità al suddetto limite tendono col crescere infinitamente del tempo: ossia il movimento tende a confondersi con un movimento uniforme e rettilineo, secondo una retta verticale, che costituisce un asintoto della trajettoria, la cui equazione, per la prima delle (6), riesce

$$x = x_0 + \frac{1}{g} \int_0^{\alpha_0} v^2 \, d\alpha.$$

Questo collima col noto fatto che i projettili, spinti a grande altezza dalle armi da fuoco, ricadono come palle morte: ed estendendo gli stessi risultati al caso limite, su cui non insistiamo, della trajettoria rettilinea, con quello che la velocità della pioggia e della grandine ha un valore sensibilmente costante, non rispondente all'altezza della caduta libera nel vuoto.

Applicazione al movimento determinato dal vincolo di un punto fisso e da forze impresse il cui risultante è applicato a questo punto - Movimento polare per inerzia - Movimento relativo al centro di massa di un projettile in un mezzo di resistenza trascurabile.

[**Esempio I**, § 15]

§ 62. — Si verifica secondo ogni asse il teorema delle aree rispetto al polo (§ 33): e per conseguenza, indicando con P, Q, R le grandezze dei momenti principali d'inerzia, relativi al polo, e con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità angolare secondo una terna d'assi formata cogli assi principali d'inerzia relativi al polo medesimo, sistema di equazioni pure del movimento è

$$P\frac{d\mathfrak{p}}{dt}=(Q-R)\mathfrak{q}\mathfrak{r},\quad Q\frac{d\mathfrak{q}}{dt}=(R-P)\mathfrak{r}\mathfrak{p},\quad R\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=(P-Q)\mathfrak{p}\mathfrak{q}. \quad (1)$$

Queste equazioni sono atte a determinare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in funzione di t, col concorso della condizione iniziale

$$t=t_o:\qquad \mathfrak{p}=\mathfrak{p}_o,\qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{q}_o,\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_o, \qquad (2)$$

le quali, conformemente a (3) del § 3, scaturiscono da

$$t=t_o:\quad \varphi=\varphi_o,\quad f=f_o,\quad \theta=\theta_o,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}_o,\quad \frac{df}{dt}=\dot{f}_o,\quad \frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}_o, \quad (3)$$

dove φ, f, θ indicano gli angoli di direzione della terna suddetta, e possono surrogarsi alle tre ultime di esse.

Concepite le $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ espresse in funzione di t, le stesse (3) del § 3, o le formole di Poisson (2) del § 2, costituiscono alla lor volta un sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie del primo ordine, atte a determinare φ, f, θ in funzione di t, col concorso delle prime tre delle (3), o, rispettivamente, α_s, β_s, γ_s ($s=1, 2, 3$), col concorso degli stessi valori iniziali e delle formole (1) del § 3. Così il problema può considerarsi come tra-

dotto in equazioni *. Ma si può approfittare di notevoli semplificazioni.

§ 63. — Intanto, si verifica secondo ogni asse il teorema della conservazione delle aree rispetto al polo (§ 33), e il valor costante della quantità di moto areale rispetto al polo medesimo riesce determinato, conformemente alle (4) del § 9, dai dati iniziali (3) del paragrafo precedente.

Sia K la grandezza della quantità di moto areale medesima, e, posta l'origine degli assi fissi nel polo, attribuiamo all'asse delle z la sua orientazione, per modo che, conformemente alla tabelletta del § 2, riescano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i suoi coseni di direzione per rispetto alla terna degli assi formata cogli assi principali d'inerzia relativi allo stesso polo. Abbiamo, per le (3) del § 9,

$$K\gamma_1 = P\mathfrak{p}, \qquad K\gamma_2 = Q\mathfrak{q}, \qquad K\gamma_3 = R\mathfrak{r}, \tag{1}$$

ossia

$$\cos f \sin\vartheta = \frac{P}{K}\mathfrak{p}, \qquad \sin f \sin\vartheta = \frac{Q}{K}\mathfrak{q}, \qquad \cos\vartheta = \frac{R}{K}\mathfrak{r}, \tag{2}$$

dove, intendendo che $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ rappresentino note funzioni del tempo, l'ultima serve per determinar ϑ in funzione dello stesso tempo, salvo il segno e un multiplo di 2π, in seguito a che le prime due determineranno f, salvo un multiplo di 2π, e sarà arbitraria la scelta dei valori disponibili ad un istante, ma determinata in seguito dal vincolo della successione continua.

Da

$$\tan\varphi = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$$

si ricava poi

$$d\varphi = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}:$$

* Per l'integrazione del sistema rappresentato dalle formole di Poisson, V. p. es., *Darboux: Théorie générale des surfaces*, t. I (Paris, 1887).

donde, valendosi delle (2) del § 2, e delle relazioni fra i coseni $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s \, (s = 1, 2, 3)$,

$$d\varphi = \frac{\gamma_1 \mathfrak{p} + \gamma_2 \mathfrak{q}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \, dt, \tag{3}$$

e per le (1),

$$d\varphi = K \frac{P \mathfrak{p}^2 + Q \mathfrak{q}^2}{P^2 \mathfrak{p}^2 + Q^2 \mathfrak{q}^2} \, dt, \tag{4}$$

che fornisce φ, in funzione di t, con una quadratura.

§ 64. — Due integrali primi, indipendenti dal tempo, delle (1) del § 62 sono immediatamente forniti dalla costanza del valore della forza viva, conformemente al relativo teorema, e al valore costantemente nullo della potenza delle forze impresse [cfr. (1) del § 34 e l'ultima formola del § 11], e dalla costanza di K. Essi sono [cfr. (1) del § 8 e (3) del § 9].

$$\left.\begin{aligned} P \mathfrak{p}^2 + Q \mathfrak{q}^2 + R \mathfrak{r}^2 &= H \\ P^2 \mathfrak{p}^2 + Q^2 \mathfrak{q}^2 + R^2 \mathfrak{r}^2 &= K^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

equazioni che possono dedursi direttamente dalle stesse (1) del § 62, moltiplicandole una volta per $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, un'altra per $P\mathfrak{p}, Q\mathfrak{q}, R\mathfrak{r}$, e ciascuna volta sommandole membro a membro.

Supponiamo poi

$$P \gtrless Q \gtrless R, \tag{2}$$

per considerare a parte i casi limiti esclusi. Moltiplicando le suddette equazioni per $\frac{\mathfrak{p}}{P}, \frac{\mathfrak{q}}{Q}, \frac{\mathfrak{r}}{R}$, e sommando, se ne ricava

$$\frac{d\omega^2}{dt} = A^2 \, \mathfrak{p} \mathfrak{q} \mathfrak{r}, \tag{3}$$

posto

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = \omega^2 \tag{4}$$

$$-2\frac{(Q-R)(R-P)(P-Q)}{PQR} = A^2, \tag{5}$$

per modo che, grazie a (2), è $A^2 > 0$.

La (4) e le (1), insieme, costituiscono un sistema di equazioni lineari omogenee in $\mathfrak{p}^2, \mathfrak{q}^2, \mathfrak{r}^2$ il cui determinante è

$$(Q-R)(R-P)(P-Q) < 0,$$

per modo che ne possiamo concepire ricavato

$$\mathfrak{p}^2 = a + \alpha\omega^2, \qquad \mathfrak{q}^2 = b + \beta\omega^2, \qquad \mathfrak{r}^2 = c + \gamma\omega^2, \tag{6}$$

dove i coefficienti sono formati con P, Q, R e coi dati iniziali.

Ne viene, introducendo queste espressioni in (3),

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \pm A^2 \sqrt{(a+\alpha\omega^2)(b+\beta\omega^2)(c+\gamma\omega^2)},$$

dove va preso + o —, secondo che, pel considerato valore di t, è ω^2 crescente o decrescente; e notiamo che, per le condizioni relative all'istante iniziale [(2) del § 62], questo segno è determinato allo stesso istante.

Quest'equazione fornisce t in funzione di ω^2 con una quadratura: e concepitone ricavato ω^2 in funzione di t, le (6) forniranno $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in funzione dello stesso t, come ci eravamo proposti.

Seguito - Caso che l'ellissoide d'inerzia relativo al polo è un ellissoide di rotazione.

§ 65. — Supposto

$$P - Q \gtrless R,$$

le equazioni (1) del § 62 diventano

$$P\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = (P - R)\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}, \qquad P\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = (R - P)\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{p}, \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0.$$

La terza fornisce immediatamente l'integrale

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 : \tag{1}$$

grazie al quale, posto

$$\frac{R - P}{P}\,\mathfrak{r}_0 = \lambda,$$

le prime due si possono scrivere

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = -\lambda\,\mathfrak{q}, \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \lambda\,\mathfrak{p},$$

e forniscono, indicando con a e μ due costanti,

$$\mathfrak{p} = a\cos(\lambda t + \mu) \qquad \mathfrak{q} = a\sin(\lambda t + \mu),$$

dove, inteso $t_0 = 0$ [cfr. (2) del § 62],

$$a = \sqrt{\mathfrak{p}_0^2 + \mathfrak{q}_0^2}, \qquad \mathfrak{p}_0 = a\cos\mu, \qquad \mathfrak{q}_0 = a\sin\mu, \tag{3}$$

e, fissato a piacere il segno del radicale — supponiamolo positivo — μ riesce determinato, salvo un multiplo di 2π.

Escludiamo, per un momento, i casi limiti

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 = 0, \qquad \mathfrak{r}_0 = 0. \tag{4}$$

Inteso, per formare l'asse delle z, attribuito all'asse polare dell'ellissoide d'inerzia relativo al polo quel senso con cui forma un angolo acuto, e non ottuso, colla velocità angolare del solido al tempo $t = 0$, sarà

$$\mathfrak{r}_0 > 0,$$

e per conseguenza

$$\lambda \gtrless 0$$

secondo che

$$R - P \gtrless 0,$$

cioè l'ellissoide medesimo schiacciato o allungato.

Introducendo le (1), (2) in (2) e (3) del § 63, se ne ricava

$$\theta = \theta, \qquad f = f + \lambda t, \qquad \varphi = \varphi_0 + \frac{K}{P} t. \tag{5}$$

Donde apparisce che l'asse polare dell'ellissoide forma un angolo costante coll'asse invariabile, e ruota intorno a questo asse, nel senso positivo, con velocità angolare di grandezza $\frac{K}{P}$, mentre lo stesso ellissoide ruota intorno al proprio asse polare, con velocità angolare di grandezza $|\lambda|$, nel senso positivo o negativo, rispetto a quel senso di detto asse con cui forma angolo acuto colla velocità angolare all'istante iniziale, secondo che è $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$, cioè secondo che l'ellissoide è allungato o schiacciato.

Questo movimento dell'ellissoide si chiama rotatorio precessionale, con precessione rispettivamente positiva e negativa: con che si indica la circostanza che il ritorno di un punto qualunque dell'equatore dell'ellissoide al piano passante per l'asse invariabile, e contenente il suo asse polare, precede o segue, a seconda del caso, il compimento di una rotazione intorno a quest'ultimo asse.

I due casi (4) esclusi si ritrovano con un passaggio al relativo limite.

Nel primo si ha, innanzi tutto,

$$K = R\,\mathfrak{r}_0,$$

per cui la terza delle (3) del § 63, tenuto conto di (1), ci dà

$$\theta = 0,$$

esprimente che l'asse polare dell'ellissoide coincide, ad ogni istante, coll'asse invariabile. In seguito, passando al limite per a tendente a o, le (2) forniscono, per (3),

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = 0.$$

Nè altro più occorre per concludere che all'ipotesi in discorso che asse di rotazione ad un istante sia l'asse polare dell'ellissoide compete un movimento rotatorio uniforme.

Nel secondo caso le (5) forniscono

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad f = f_o, \qquad \varphi = \varphi_o + \omega_o t,$$

dove

$$\omega_o = \sqrt{\mathfrak{p}_o^2 + \mathfrak{q}_o^2}$$

rappresenta la grandezza della velocità angolare iniziale. Le quali competono ad un movimento rotatorio uniforme intorno all'asse invariabile, con velocità angolare di quella grandezza. Per cui un movimento rotatorio uniforme compete anche all'ipotesi che asse di rotazione ad un istante sia un qualunque asse equatoriale dell'ellissoide d'inerzia relativo al polo.

Collegando i due risultati, si vede che il movimento è rotatorio uniforme ogniqualvolta l'asse di rotazione ad un istante è un asse principale d'inerzia.

§ 66. — Sia

$$P = Q = R,$$

cioè l'ellissoide d'inerzia relativo al polo si riduca ad una sfera. Ogni diametro conta, in tal caso, come asse principale d'inerzia relativo al centro: e perciò si può inferire, senz'altro, dall'ultima conclusione che il movimento sarà certamente rotatorio uniforme.

Del resto, le (1) e (5) del paragrafo precedente forniscono, in questo caso,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_o, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_o, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_o, \quad \theta = \theta_o, \quad f = f_o, \quad \varphi = \varphi_o + \omega_o t,$$

che competono al movimento medesimo.

Seguito - Caso che l'ellissoide d'inerzia relativo al polo sia un ellissoide a tre assi, integrato per mezzo delle funzioni ellittiche.

§ 67. — Posto

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \Delta\varphi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}, \qquad \varkappa^2 < 1, \qquad (1)$$

si riconosce facilmente che, come è u funzione di φ, così ne risulta φ funzione di u tra $-\infty$ e $+\infty$.

Poniamo

$$\varphi = \mathrm{am}\,\varphi$$

$$\left.\begin{array}{c} \sin \mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u, \qquad \cos \mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u, \qquad \Delta\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u. \\ (\mathrm{mod}\,\varkappa) \end{array}\right\} (2)$$

Le tre funzioni $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, dipendenti, oltre che da u (argomento), dal parametro $\varkappa$ (modulo), si chiamano funzioni ellittiche. Senza entrare nell'ampio argomento analitico della loro teoria *, basterà al nostro scopo tener presente le relazioni seguenti, che, in base alla precedente definizione, si dimostrano senza alcuna difficoltà, e alcune ne sono conseguenza immediata:

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{dn} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du} = -\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u; \quad (3)$$

$$\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u = 1 \qquad \varkappa^2\,\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{dn}^2 u = 1; \qquad (4)$$

---

* Fra i numerosi trattati, vedi, per un completo svolgimento, *Bianchi: Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, 1901), e, per un largo sunto, con applicazioni, *Appell et Lacour: Principes de la théorie des fonctions elliptiques* (Paris, 1897).

$$\left.\begin{array}{lll}\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u, & \operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u\\ \operatorname{sn}(2n\omega+u)=(-1)^n\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(2n\omega+u)=(-1)^n\operatorname{cn}u, & \operatorname{dn}(2n\omega+u)=\operatorname{dn}u\\ \operatorname{sn}(2\omega-u)=\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(2\omega-u)=-\operatorname{cn}u & \\ & \omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad n \text{ intero}; & \end{array}\right\}\quad(5)$$

$$\operatorname{sn}u=0,\ u=2n\omega;\quad \operatorname{cn}u=0,\ u=(2n+1)\omega;\quad \operatorname{dn}u>0. \quad (6)$$

Ciò premesso, rileviamo l'analogia tra le (1) del § 62 e le (3), e, supposto

$$P \gtrless Q \gtrless R, \quad (7)$$

poniamo

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{p}=a\operatorname{cn}(\lambda t+\mu),\quad \mathfrak{q}=b\operatorname{sn}(\lambda t+\mu),\quad \mathfrak{r}=c\operatorname{dn}(\lambda t+\mu),\\ (\text{mod. } \varkappa)\end{array}\right\}(8)$$

riservandoci di determinare, se è possibile, le costanti a, b, c, λ, μ e il modulo $\varkappa$, mediante le costanti intrinseche, e i dati iniziali.

Introducendo le (8) nelle suddette equazioni differenziali (1) del § 62, ne ricaviamo, in virtù delle (3),

$$a\lambda=-\frac{Q-R}{P}bc,\quad b\lambda=-\frac{P-R}{Q}ac,\quad \varkappa^2c\lambda=-\frac{P-Q}{R}ab, \quad (9)$$

dalle quali scaturiscono

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{P(P-R)}{Q(Q-R)},\quad \varkappa^2\frac{c^2}{a^2}=\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)},\quad \lambda^2=\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}c^2, \quad (10)$$

dove, per (7), i secondi membri sono positivi.

D'altra parte, introducendo nelle (4) le (8), applicate a $t=0$, se ne ricava

$$\frac{\mathfrak{p}_0^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{q}_0^2}{b^2}=1,\qquad \varkappa^2\frac{\mathfrak{q}_0^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{r}_0^2}{c^2}=1, \quad (11)$$

che forniscono

$$a^2 = \mathfrak{p}_o^2 + \frac{a^2}{b^2}\mathfrak{q}_o^2, \qquad b^2 = \mathfrak{q}_o^2 + \frac{b^2}{a^2}\mathfrak{p}_o^2, \qquad c^2 = \mathfrak{r}_o^2 + \frac{a^2}{b^2}\frac{\varkappa^2 c^2}{a^2}\mathfrak{q}_o^2.$$

E in quest' ultime relazioni introducendo le (10) si ottiene

$$a^2 = \frac{P(P-R)\mathfrak{p}_o^2 + Q(Q-R)\mathfrak{q}_o^2}{P(P-R)}$$

$$b^2 = \frac{P(P-R)\mathfrak{p}_o^2 + Q(Q-R)\mathfrak{q}_o^2}{Q(Q-R)}$$

$$c^2 = \frac{Q(P-Q)\mathfrak{q}_o^2 + R(P-R)\mathfrak{r}_o^2}{R(P-R)}.$$

Segue da queste

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{P}{R}\frac{Q(P-Q)\mathfrak{q}_o^2 + R(P-R)\mathfrak{r}_o^2}{P(P-R)\mathfrak{p}_o^2 + Q(Q-R)\mathfrak{q}_o^2}:$$

con che la seconda delle (10) fornisce

$$\varkappa^2 = \frac{Q-R}{P-Q}\frac{Q(P-Q)\mathfrak{q}_o^2 + R(P-R)\mathfrak{r}_o^2}{P(P-R)\mathfrak{p}_o^2 + Q(Q-R)\mathfrak{q}_o^2}.$$

Escludiamo il caso che riesca $\varkappa^2 = 1$, corrispondente a speciali valori delle costanti iniziali, che si potrà trattare come caso limite. Allora di qua risulterà o senz'altro $\varkappa^2 < 1$, *come occorre,* o $\varkappa^2 > 1$. Ora, in questo secondo caso, basta scambiare la denominazione degli assi precedentemente chiamati delle $\mathfrak{x}$ e delle $\mathfrak{z}$, con che si scambiano P e R, $\mathfrak{p}_o$ e $\mathfrak{r}_o$, a e c, per ridursi al primo caso, come dalla ricordata seconda delle (10) immediatamente apparisce. Ciò vuol dire che, se si ha $\varkappa^2 > 1$ con una delle due ipotesi (7), si ha $\varkappa^2 < 1$ coll'altra. Per modo che basta scegliere opportunamente, fra i due assi maggiore e minore, quello che si denomina asse delle $\mathfrak{z}$, per ottenere, delle due ipotesi, quella che conviene.

Il segno di a, b, c si può scegliere a piacere. Attribuiamo a tutte il segno $+$. Ciò posto, le (8), applicate a $t = 0$, cioè

$$\mathfrak{p}_o = a \operatorname{cn} \mu, \qquad \mathfrak{q}_o = b \operatorname{sn} \mu, \qquad \mathfrak{r}_o = c \operatorname{dn} \mu,$$

conciliabili fra loro, essendo le a, b, c determinate conformemente alle (11), forniscono μ, salvo l'aggiunta di un multiplo di 4ω [cfr. (5)].

Infine la terza delle (10) ci dà

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}} c:$$

e, per la (9) (stante la suddetta scelta del segno + per a, b, c), si deve prendere + o — secondo che $P < Q < R$ o $P > Q > R$: con che il segno di λ riesce perfettamente determinato, poichè sappiamo ch'è determinata quella che bisogna fare delle due ipotesi.

Così, la determinazione delle costanti, introdotte nelle formole integrali (8), è completa.

§ 68. — Rammentiamo [(2) del § 63]

$$\cos\theta = \frac{R}{K} \mathrm{r}. \tag{1}$$

Essendo costantemente $\mathrm{dn}\, u > 0$ [(16) del paragrafo precedente], mentre il segno di c è supposto +, e si vedrà come si deve escludere $c = 0$ (§ 69, *Osservazione*), se ne ricava, per qualunque valore di t,

$$\cos\theta > 0.$$

Per modo che l'ipotesi che il segno di c sia + torna a fissare il senso dell'asse delle ζ (asse maggiore o minore) in modo da formare un angolo acuto, e non ottuso, coll'asse invariabile (col senso della quantità di moto areale costante), all'istante iniziale, in seguito a che la stessa circostanza si verifica ad ogni istante.

Inoltre, eccettuato il caso che sia $a = b = 0$, che considereremo in seguito (§ 69), è,

$$\frac{R\mathrm{r}}{K} < 1.$$

Quindi, escluso quel caso, costantemente

$$\cos\theta < 1:$$

con che l'asse in discorso non potrà raggiungere neppure l'asse invariabile, ma oscillerà fra esso e il piano invariabile, senza arrivare nè all'uno nè all'altro.

Per

$$d\varphi = K\frac{P\mathfrak{p}^2+Q\mathfrak{q}^2}{P^2\mathfrak{p}^2+Q^2\mathfrak{q}^2}\,dt \tag{2}$$

(formole suddette), φ costantemente cresce; cioè il piano contenente l'asse invariabile e l'asse delle ζ (asse maggiore o minore, a seconda del caso) ruota intorno all'asse invariabile in senso positivo.

Infine si ha [(3) del § 3]

$$df = \cos\vartheta\, d\varphi - \mathfrak{r}\, dt,$$

donde, per (1) e (2),

$$df = K\cos\vartheta\,\frac{P(R-P)\mathfrak{p}^2+Q(R-Q)\mathfrak{q}^2}{R(P^2\mathfrak{p}^2+Q^2\mathfrak{q}^2)}\,dt.$$

E ne risulta, poichè $K\cos\vartheta>0$, che f costantemente cresce o decresce secondo che è $P<Q<R$ o $P>Q>R$, cioè $\lambda>0$ o $\lambda<0$, o infine, secondo che l'asse delle ζ è l'asse minore o maggiore; vale a dire l'ellissoide d'inerzia ruota intorno all'asse delle ζ, in senso positivo o negativo, secondo che questa rappresenta l'asse maggiore o minore.

In conclusione, si ha un movimento rotatorio precessionale, con precessione positiva o negativa, come nel caso dell'ellissoide di rotazione (§ 65); soltanto che, nel presente caso, è accompagnato da un'oscillazione — o nutazione — dell'asse di rotazione dell'ellissoide fra l'asse e il piano invariabile.

§ 69. — Il caso che ad un istante — sia per $t=0$ — funga da asse di rotazione l'asse maggiore o minore dell'ellissoide d'inerzia relativo al polo si può dedurre dalle precedenti formole, facendovi tendere a zero $\mathfrak{q}_0$ e $\mathfrak{p}_0$, oppure $\mathfrak{r}_0$, secondo che detto asse forma l'asse delle $\mathfrak{r}$ oppure quelle delle ζ. Ma, conformemente alla regola che la scelta degli assi fornisca $\varkappa^2<1$, si deve escludere la seconda ipotesi, e attenersi alla prima, colla quale riuscendo, per le (8), applicate a $t=0$,

$$\lim a=0,\qquad \lim b=0,\qquad \lim c=\mathfrak{r}_0>0,$$

la seconda delle (10) fornisce appunto

$$\lim \varkappa^2 = 0.$$

Così si ritrova, assumendo i valori limiti come competenti al caso in discorso,

$$\mathfrak{p} = 0, \quad \mathfrak{q} = 0, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0.$$

Donde segue, per (2) del § 63,

$$\cos\theta = 1, \quad \theta = 0.$$

E collegando questo risultato col precedente, se ne conclude che il movimento risulta, nello stesso caso, rotatorio uniforme.

Infine, per la circostanza che questi sono i valori limiti col tendere dell'asse istantaneo di rotazione iniziale all'asse maggiore o minore, si vede che si potrà approssimarsi a piacere al caso del movimento uniforme, assumendo l'asse di rotazione ad un istante abbastanza vicino all'uno o all'altro di essi.

La stessa proprietà non compete all'asse medio.

Osservazione. — Rileviamo che, reciprocamente, per le (8), l'ipotesi $a = b = 0$ trae con sè $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 = 0$; come pure che, per le (9), non è ammissibile l'ipotesi $c = 0$, se non ammettendo insieme $a = b = 0$, con che si ritrova l'equilibrio.

Seguito - Teorema e movimento di Poinsot.

§ 70. — Il sistema formato dall'integrale della conservazione dell'energia (§ 64), e dai tre integrali della conservazione delle aree (§ 63), è suscettibile di un'interpretazione meccanica, che si traduce in un'elegante proprietà del movimento in discorso.

Poniamo

$$\mathfrak{p} = \sqrt{H}\,\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{q} = \sqrt{H}\,\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{r} = \sqrt{H}\,\mathfrak{z}, \tag{1}$$

e consideriamo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ come coordinate di un punto rispetto agli assi mobili.

Abbiamo, in primo luogo,

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}}, \qquad P\mathfrak{x}^2 + Q\mathfrak{y}^2 + R\mathfrak{z}^2 = 1:$$

per le quali detto punto, ad ogni istante, rappresenta l'uno e l'altro (secondo il segno di $\sqrt{H}$) dei due punti d'intersezione dell'asse istantaneo coll'ellissoide d'inerzia relativo al polo.

D'altra parte, introducendo le (1) negl'integrali della conservazione delle aree, se ne ricava

$$P\mathfrak{x}\alpha_1 + Q\mathfrak{y}\alpha_2 + R\mathfrak{z}\alpha_3 = \frac{K}{\sqrt{H}} a_1$$

$$P\mathfrak{x}\beta_1 + Q\mathfrak{y}\beta_2 + R\mathfrak{z}\beta_3 = \frac{K}{\sqrt{H}} a_2$$

$$P\mathfrak{x}\gamma_1 + Q\mathfrak{y}\gamma_2 + R\mathfrak{z}\gamma_3 = \frac{K}{\sqrt{H}} a_3$$

$$P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2 + R^2\mathfrak{z}^2 = \frac{K^2}{H},$$

dove K e a_1, a_2, a_3, rappresentano la grandezza della quantità di moto areale, e i suoi coseni di direzione rispetto agli assi fissi. Per le quali relazioni, la normale all'ellissoide nel punto medesimo ha la direzione invariabile della quantità di moto areale relativa al polo, ed è costante la distanza del pian tangente dal polo.

Se ne conclude che l'ellissoide d'inerzia relativo al polo tocca costantemente con un punto di velocità nulla un piano fisso — cioè rotola senza strisciare sopra un piano fisso — il quale ha la giacitura del piano invariabile.

Questo è il così detto « teorema di Poinsot », e da esso si chiama « movimento di Poinsot » ogni movimento per cui una quadrica centrata, intesa invariabilmente connessa col mobile, rotola senza strisciare sopra un piano fisso *.

---

* Cfr. *Halphen: Traité des fonctions elliptiques*. Deuxieme Partie. Chap. II (Paris, 1888). *Meccanica*, § 363.

Applicazione al movimento determinato dal vincolo di un punto fisso e dalla gravità - Movimento polare per gravità - Trottola fissa.

[Esempio I, § 15].

§ 71. — Assumiamo le solite due terne di assi, l'una fissa, la quale abbia il polo per origine, e l'asse delle z orientato come la gravità (volto verticalmente in basso), l'altra formata cogli assi principali d'inerzia relativi al polo.

Indichiamo con M la grandezza della massa del solido, con g la grandezza dell'accelerazione di gravità, con $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate del centro di massa nella terna mobile (costanti), e conserviamo il precedente significato ai simboli ripetutamente adoperati.

Il risultante delle forze impresse avrà per componenti secondo gli assi mobili

$$Mg\gamma_1, \qquad Mg\gamma_2, \qquad Mg\gamma_3,$$

e sarà applicata al punto $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$: per cui le analoghe componenti del momento delle forze impresse rispetto al polo riescono

$$Mg(\mathfrak{y}\gamma_3 - \mathfrak{z}\gamma_2), \qquad Mg(\mathfrak{z}\gamma_1 - \mathfrak{x}\gamma_3), \qquad Mg(\mathfrak{x}\gamma_2 - \mathfrak{y}\gamma_1).$$

D'altra parte, si verifica secondo ogni asse il teorema delle aree rispetto al polo (§ 33). Quindi sistema di equazioni pure riesce

$$\left.\begin{aligned}
P\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q-R)\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} &= Mg(\mathfrak{y}\gamma_3 - \mathfrak{z}\gamma_2)\\
Q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (R-P)\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{p} &= Mg(\mathfrak{z}\gamma_1 - \mathfrak{x}\gamma_3)\\
R\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (P-Q)\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} &= Mg(\mathfrak{x}\gamma_2 - \mathfrak{y}\gamma_1).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Possiamo da queste equazioni concepire eliminate $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ mediante le (3) del § 3, per trasformarle in equazioni del 2° ordine dove φ, f, θ fungono da incognite e t da variabile indipendente; o meglio concepirvi aggregate le formole di Poisson [(2) del § 2]

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2\,\mathfrak{r} - \gamma_3\,\mathfrak{q}, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\,\mathfrak{p} - \gamma_1\,\mathfrak{r}, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\,\mathfrak{q} - \gamma_2\,\mathfrak{p}, \tag{2}$$

per formare un sistema di sei equazioni differenziali del 1° ordine fra $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e t, atte a fornire le prime sei variabili in funzione di t, col concorso di

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

in virtù della quale una delle (2) riesce una combinazione lineare delle rimanenti. In seguito a che si ricavano φ, f, θ in funzione di t dalle formole generali [(2) del § 3 e (3) del § 63]

$$\gamma_1 = \cos f \sin\theta, \qquad \gamma_2 = \sin f \sin\theta, \qquad \gamma_3 = \cos\theta \tag{3}$$

$$d\varphi = \frac{\gamma_1\,\mathfrak{p} + \gamma_2\,\mathfrak{q}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\,dt. \tag{4}$$

§ 72. — *Caso di Euler o di Poinsot.* L'ipotesi che funga da polo il centro di massa ci riconduce alla precedente applicazione [§§ 62-69]: ed infatti le (1) del precedente paragrafo, supposto $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$ si riducono alle (1) del § 62. Questo è il così detto caso di Euler o di Poinsot, che d'or in avanti intenderemo escluso.

§ 73. — In ogni caso, il movimento in discorso verifica il teorema della conservazione delle aree secondo l'asse delle z (§ 33), perchè il momento del risultante delle forze impresse — cioè del peso applicato al centro di massa — riesce perpendicolare alla direzione della gravità, ch'è quella di detto asse, e il teorema della conservazione dell'energia (§ 34), perchè i vincoli sono indipendenti dal tempo, e le forze impresse ammettono potenziale, rappresentato da

$$Mg\,(\mathfrak{x}\,\gamma_1 + \mathfrak{y}\,\gamma_2 + \mathfrak{z}\,\gamma_3).$$

Così, abbiamo senz'altro i due integrali primi

$$P\mathfrak{p}\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\gamma_2 + R\mathfrak{r}\gamma_3 = \text{cost.} \qquad (1)$$

$$P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2 = Mg(\mathfrak{x}\gamma_1 + \mathfrak{y}\gamma_2 + \mathfrak{z}\gamma_3) + \text{cost.} \qquad (2)$$

[cfr. (4) del § 9 e (1) del § 8].

§ 74. — *Caso di Lagrange o di Poisson.* Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia relativo al polo sia un ellissoide di rotazione, e che il centro di massa si trovi sull'asse polare: caso detto di Lagrange o di Poisson.

Formato coll'asse polare l'asse delle $\mathfrak{z}$, si avrà

$$P = Q, \qquad (1)$$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0: \qquad (2)$$

con che la terza delle (1) del § 70 fornisce immediatamente il nuovo integrale

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_o . \qquad (2)$$

E la conoscenza di questo basta perchè l'ulteriore determinazione delle incognite si possa fare per mezzo di quadrature.

Difatti, (1) del precedente paragrafo acquista, per (1) e (3), la forma

$$\mathfrak{p}\gamma_1 + \mathfrak{q}\gamma_2 = A - \frac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3, \qquad (4)$$

dove

$$A = \mathfrak{p}_o\gamma_1^o + \mathfrak{q}_o\gamma_2^o + \frac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3^o . \qquad (4')$$

Mentre (2) dello stesso paragrafo, per (1), (2) e (3), diventa

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 = B + 2\frac{Mg\mathfrak{z}}{P}\gamma_3 \qquad (5)$$

dove

$$B = \mathfrak{p}_o^2 + \mathfrak{q}_o^2 - 2\frac{Mg\mathfrak{z}}{P}\gamma_3^o . \qquad (5')$$

Inoltre, per (4), la formola generale (4) del § 71 diventa

$$d\varphi = \frac{A - \dfrac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3}{1 - \gamma_3^2}\, dt, \tag{6}$$

mentre, per (3) e (6), la terza delle (3) del § 3 fornisce

$$df = \left(\frac{A - \dfrac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3}{1 - \gamma_3^2}\gamma_3 - \mathfrak{r}_o\right) dt. \tag{7}$$

Per modo che φ e f si otterranno per mezzo di quadrature, una volta che sia espressa γ_3 in funzione di t: ciò che equivale, alla sua volta, ad esprimere θ.

Ciò premesso, da (4) e da

$$-\mathfrak{p}\gamma_2 + \mathfrak{q}\gamma_1 = \frac{d\gamma_3}{dt}$$

[cfr. (2) del § 2], quadrando e sommando, si ricava

$$\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\left(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2\right) = \left(A - \frac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2.$$

Introducendo il qual risultato in (5), questa si riduce a

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \left(B + \frac{2Mg\,\mathfrak{z}}{P}\gamma_3\right)\left(1 - \gamma_3^2\right) - \left(A - \frac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3\right)^2, \tag{8}$$

che fornisce γ_3 con una quadratura.

Supponiamo che, per formare l'asse delle $\mathfrak{z}$, si assuma l'asse polare volto dalla parte che contiene il centro di massa, con che $\mathfrak{z} > 0$.

Consideriamo due casi particolari *.

* Vedansi, per un'ampia trattazione, *Halphen: Traité des Fonctions elliptiques,* etc. — 2me Partie — (Paris, 1888), e *Klein und Sommerfeld: Theorie des Kreisels* (Leipzig, 1897-98). Fra i nostri, debbono citarsi a questo proposito, *Padova: Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione pesante* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1884), *Dimostrazione di un teorema di Jacobi* (Atti del R. Ist. Veneto, 1892) e *R. Marcolongo: Sopra due moti di Poinsot concordanti* (Annali di Matem., 1894) e *Sul giroscopio pesante* (Ibid., 1902).

Sia, in primo luogo, $\mathfrak{p}_o = \mathfrak{q}_o = 0$. L'equazione (8) si potrà porre sotto la forma

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = (\gamma_3 - \gamma_3^o)\left[\frac{2Mg\zeta}{P}(1-\gamma_3^2) - \frac{R^2\mathfrak{r}_o^2}{P^2}(\gamma_3 - \gamma_3^o)\right];$$

donde apparisce che, affinchè il secondo membro riesca positivo, dovrà γ_3 oscillare fra γ_3^o e la radice $\overline{\gamma}_3$ compresa fra γ_3^o e 1 dell'espressione fra parentesi quadre, che si riconosce subito come esista e sia unica*. Ne viene che l'asse polare possederà un movimento di nutazione entro l'intercapedine compresa fra le due superficie coniche corrispondenti a γ_3^o e a $\overline{\gamma}_3$ (più bassa), così da toccare alternativamente l'una e l'altra. Ora, per quanto precede, si ha

$$\frac{\overline{\gamma}_3 - \gamma_3^o}{1 - \overline{\gamma}_3^2} = \frac{2MPg\zeta}{R^2\mathfrak{r}_o^2},$$

per cui la seconda superficie conica tenderà rapidamente a confondersi colla prima, col crescere di $|\mathfrak{r}_o|$; che se si suppone $|\mathfrak{r}_o|$ estremamente grande, l'asse polare apparirà formare colla verticale un angolo invariabile.

Si ha poi, tenendo calcolo di $\gamma_3 \overline{\gtrless} \gamma_3^o$ e, della precedente relazione,

$$\left|\frac{A - \frac{R\mathfrak{r}_o}{P}\gamma_3}{1-\gamma_3^2}\right| = \frac{R\,|\mathfrak{r}_o|}{P}\,\frac{\gamma_3 - \gamma_3^o}{1-\gamma_3^2} \overline{\leq} \frac{2Mg\zeta}{R\,|\mathfrak{r}_o|}.$$

Con che la (7) si riduce sensibilmente a

$$\dot{f} = -\mathfrak{r}_o,$$

e la (6) definisce un movimento progressivo del semipiano terminato alla verticale del polo contenente il centro di massa, intorno alla verticale stessa, in senso opposto, rispetto al suo senso d'alto in basso, a quello del solido intorno all'asse polare, volto verso il centro di massa. Prendendo il valor medio del coefficiente, che pochissimo si scosta dallo 0, si trova

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{Mg\zeta}{R\mathfrak{r}_o}.$$

Questo è il caso di una trottola, di cui il polo rappresenti il punto d'appoggio, inteso fisso. Si vede come il calcolo fornisca le principali circostanze sperimentali di un tal movimento.

* Detta espressione è — per 1, + per γ_3^o e -1, — per $-\infty$.

In secondo luogo, sia, all'opposto, $\mathfrak{r}_o = 0$. Le equazioni (6), (7) e (8) diventano

$$d\varphi = \frac{A}{1-\gamma_3^2}\,dt, \qquad df = \frac{A\gamma_3}{1-\gamma_3^2}\,dt$$

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \left(B + \frac{2Mg\delta}{P}\gamma_3\right)\left(1-\gamma_3^2\right) - A^2,$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = A, \qquad \sin^2\theta\frac{df}{dt} = A\cos\theta \\ &\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = B + \frac{2Mg\delta}{P}\cos\theta - \frac{A^2}{\sin^2\theta}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

dove, per (4'),

$$A = \mathfrak{p}_o\gamma_1^o + \mathfrak{q}_o\gamma_2^o = \mathfrak{p}_o\gamma_1^o + \mathfrak{q}_o\gamma_2^o + \mathfrak{r}_o\gamma_3^o.$$

Che se

$$A = 0,$$

cioè la velocità angolare ad un istante è nulla, oppure orizzontale, otteniamo

$$\varphi = \text{cost.} \qquad f = \text{cost.}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = B + \frac{2Mg\delta}{P}\cos\theta. \qquad (10)$$

Cioè non vi è rotazione intorno all'asse polare dell'ellissoide d'inerzia relativo al polo, e questo asse si move in un piano verticale conformemente a (10).

Queste sono le equazioni del pendolo, che considereremo in seguito.

§ 75. — Il problema in discorso è fra i più studiati della Meccanica. Tuttavia il caso di Euler o di Poinsot (§ 73) e quello di Lagrange o di Poisson (§ 74) restarono i soli pienamente integrati finchè Sofia Kovalevskij, nel 1888, colla scoperta del

caso che porta il suo nome, non inaugurò una nuova serie di risultati *. Torneremo su questo problema nella terza Parte.

Applicazione al movimento determinato dal vincolo della riunione del centro di massa con un punto fisso, mediante un filo teso, e dalla gravità - Pendolo semplice.

[**Esempio II**, § 16].

§ 76. — Si verifica secondo ogni asse passante pel centro di massa il teorema della conservazione delle aree (§ 33): con che il movimento relativo al centro di massa — vale a dire relativo ad una terna d'assi d'orientazione fissa, coll'origine nel centro di massa — non è altro che il movimento polare per inerzia, precedentemente studiato (§§ 62-70). E non resta che da esaminare il movimento dello stesso centro di massa.

§ 77. — Perciò assumiamo il punto fisso per origine, e attribuiamo all'asse delle z l'orientazione della gravità, cioè sia volto verticalmente in basso. Indichiamo con x, y, z le coordinate del centro di massa, con g la grandezza dell'accelerazione di gravità.

La proprietà che il risultante delle pressioni vincolari avrà la direzione della congiungente il punto fisso col punto vincolato (§ 47, *Es.*) ci permette di scrivere immediatamente il sistema di equazioni pure

$$\frac{\frac{d^2 x}{d t^2}}{x} = \frac{\frac{d^2 y}{d t^2}}{y} = \frac{\frac{d^2 z}{d t^2} - g}{z} \qquad (1)$$

cui va aggiunta, indicando con l la grandezza della distanza del centro di massa dal punto fisso — lunghezza del filo —

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

* *Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, etc.* (Mémoires des savants étrangers, T. XXXI, N. 1). V. anche *Acta Mathematica*, T. XII.

ossia

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0. \qquad (2)$$

Le (1) possono anche porsi sotto la forma di equazioni non pure

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\frac{x}{l},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\frac{y}{l},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=g+\lambda\frac{z}{l}, \qquad (1')$$

con che $M\lambda$ rappresenta la misura del suddetto risultante — trazione del filo — attribuitogli per asse il raggio spiccato dal punto fisso al centro di massa, così da riuscire volta in questo stesso senso o nell'opposto secondo che λ è positivo o negativo.

Essendo il momento delle forze impresse perpendicolare all'asse delle z, il momento *del solido* verifica secondo questo asse il teorema della conservazione delle aree (§ 33); e poichè questo stesso teorema si verifica nel movimento del solido medesimo relativo al suo centro di massa (§ 76), le formole (5) del § 9 ci forniscono

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c \qquad (3)$$

dove c indica una costante: che è un integrale primo delle (1).

Così, ammettendo le forze impresse potenziale Mgz, il movimento *del solido* verifica il teorema della conservazione dell'energia (§ 34); e poichè nel movimento relativo al centro di massa la forza viva si mantiene costante (§ 76), la formola (2) del § 8 ci dà

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=h+2gz, \qquad (4)$$

dove h indica una costante: altro integrale primo delle (1).

Notiamo che (3) si ricava immediatamente dalle prime due delle (1'), sottraendo la prima moltiplicata per y dalla seconda moltiplicata per x, poi integrando: e (4) si deduce dalle stesse (1'),

moltiplicandole per x, y, z rispettivamente, sommandole, tenendo conto di (2), e integrando.

Posto

$$x = l \cos\varphi \sin\theta, \qquad y = l \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = l \cos\theta, \tag{5}$$

per modo che φ, θ rappresentino le coordinate sferiche del centro di massa sulla superficie sferica assegnata al suo movimento, preso l'asse polare coll'orientazione della gravità, e assunto per primo meridiano il semipiano terminato all'asse delle z contenente l'asse delle x positive, le (3) e (4) si riducono a

$$l^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = c \tag{6}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\theta, \tag{7}$$

trasformazione che si eseguisce immediatamente, osservando il significato geometrico dei primi membri.

Fra le quali equazioni eliminando $\frac{d\varphi}{dt}$, si trova

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\theta - \frac{c^2}{l^4 \sin^2\theta} \tag{8}$$

E con questo l'ulteriore integrazione è ridotta alle quadrature.

Per (6), supposto $c \gtrless 0$, φ riesce costantemente crescente o decrescente, per modo che il semipiano terminato alla verticale del punto fisso, contenente il centro di massa, gira progressivamente intorno alla verticale medesima.

L'ipotesi $c = 0$, per la stessa (6), significa che la velocità del centro di massa, ad un istante, è nulla, o parallela al piano contenente il punto e la verticale del punto fisso. In questo caso, per (6),

$$\varphi = \text{cost.}$$

per modo che il movimento del punto si compie in quel piano.

E, per (8), determinare questo movimento, si ha l'equazione

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\vartheta. \tag{9}$$

Studieremo quest'equazione nell'applicazione seguente (§ 82). Intanto osserviamo che la prima e la terza delle (9) del § 74 si riducono a (6) e (7), ponendo

$$\frac{P}{M\,\mathfrak{z}} = l, \qquad l^2 A = c, \qquad l^2 B = h. \tag{10}$$

Il movimento in discorso si chiama movimento del pendolo semplice, colla qualifica ulteriore, se occorre, di conico e piano, secondo che si verifica il caso che il raggio descritto dal punto fisso al centro di massa descrive una superficie conica, oppure il caso particolare che si move in un piano verticale. Esso corrisponde al movimento di un corpuscolo pesante riunito ad un punto fisso mediante un filo — nell'ipotesi che si mantenga disteso — o meglio, mediante una verghetta sottilissima, così da poterne trascurare il peso, il quale effettivamente ne verifica le principali circostanze.

Vediamo così che il caso di Lagrange e Poisson del movimento di un grave sospeso per un punto, nell'ipotesi che ad un istante sia nulla la velocità angolare intorno all'asse polare dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso, si riduce, per quanto concerne la variazione col tempo degli angoli ϑ e φ, a quello di un pendolo semplice, avente lo stesso punto fisso, e lunghezza rappresentata dalla prima delle (10), mentre le due rimanenti relazioni collegano i dati iniziali dei due movimenti medesimi.

§ 78. — Posizioni d'equilibrio sono tutte e solo quelle per cui il centro di massa si trova sulla verticale del punto fisso (§ 47, *Es. II*), distinte in due gruppi, secondo che sta al di sotto o al di sopra. Tutte sono posizioni d'equilibrio instabile *pel solido* (§ 41): perchè, essendo il movimento del solido relativo al centro di massa un movimento di Poinsot (§ 76), non è possibile, con qualunque forza viva iniziale, che non sia nulla, mantener la posizione del mobile entro confini ristretti ad arbitrio.

È bensì posizione d'equilibrio stabile *pel centro di massa* la

posizione inferiore, come scaturisce dal teorema di Dirichlet (§ 45), per la circostanza che il potenziale vi riceva un valor massimo, che, se si prescinde da spostamenti intorno al centro di massa, riesce effettivo. Invece emergerà dall'esame della seguente applicazione (§ 83) che la posizione superiore è, anche pel centro di massa, d'equilibrio instabile.

§ 79. — *Trazione del sostegno.* Dalle (1′), tenendo calcolo di (2), per la quale si ha

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=-\mathrm{v}^2,$$

si deduce

$$\lambda=-\frac{1}{l}\left(gz+\mathrm{v}^2\right)=-\left(g\cos\theta+\frac{\mathrm{v}^2}{l}\right), \qquad (1)$$

che fornisce la misura $M\lambda$ della trazione del sostegno (§ 77). Così, riferendosi alla realizzazione materiale del vincolo con un filo o una verghetta, deve verificarsi, in primo luogo, la disuguaglianza

$$M\left|\,g\cos\theta+\frac{\mathrm{v}^2}{l}\,\right|<f,$$

dove f indica un termine commisurato al così detto limite di resistenza alla rottura del filo o della verghetta medesima, dipendente dalle sue dimensioni e dalla qualità fisica del materiale con cui è formata.

Inoltre, se si suppone che il sostegno sia un filo, questo non può esercitare che una trazione diretta verso il punto fisso, per cui, stando (1), deve verificarsi l'altra disuguaglianza

$$\mathrm{v}^2>-g\,l\cos\theta,$$

implicante che la grandezza della velocità deve superare un certo limite, quando è $\cos\theta\geqq 0$, cioè quando il punto si trova al di sopra del piano orizzontale passante pel punto fisso.

Queste circostanze rispondono a ben noti fatti sperimentali.

Applicazione al movimento determinato dal vincolo di una retta fissa e dalla gravità - Porta pesante - Pendolo composto.

[**Esempio III**, § 17].

§ 80. — Si verifica secondo un asse formato colla retta fissa, e rispetto ad un punto qualunque di esso, il teorema delle aree (§ 33), per cui, formando la quantità di moto areale coll'avvertenza che il movimento del solido sarà rotatorio, colla retta fissa per asse (cfr. § 9), equazione pura del movimento riesce

$$\frac{d K \frac{d\varphi}{dt}}{dt} = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L, \qquad (1)$$

dove K rappresenta il momento d'inerzia del solido rispetto alla retta fissa, φ l'angolo di rotazione del medesimo al tempo t, rispetto all'asse formato attribuendo alla retta un senso a piacere (crescente nel senso del giro positivo relativamente a questo), L la componente secondo questo asse del momento delle forze impresse, cioè del momento del peso del solido applicato al suo centro di massa, rispetto ad un punto qualunque della retta come polo, o, in altri termini, la misura del momento delle stesse forze impresse rispetto alla retta, attribuitagli, col supposto senso, come asse.

Riesce identicamente $L = 0$, se il centro di massa si trova sulla retta, o la retta è verticale. Allora (1) fornisce

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' t,$$

equazione di un movimento uniforme, o nullo. Questi casi saranno d'or innanzi esclusi.

In generale, si trova

$$L = - M g s \sin i \sin\varphi,$$

dove M, g, s e i indicano le grandezze della massa del solido, dell'accelerazione di gravità, della distanza del centro di massa

dall'asse di rotazione e dell'angolo compreso fra l'asse fisso e l'orientazione della gravità, cioè la verticale volta in basso, mentre φ indica la misura, positiva o negativa, a seconda della posizione, dell'angolo formato dal semipiano terminato all'asse contenente il centro di massa col semipiano analogo orientato come la gravità, inteso crescente nel senso del giro positivo rispetto al senso attribuito allo stesso asse, con che viene perfettamente determinato il suddetto angolo di rotazione. Questa formola si stabilisce subito, assumendo, per un momento, l'asse in discorso per asse delle x, il piede della perpendicolare descritto dal centro di massa sopra di esso per origine, e spiccando l'asse delle z positive nel semipiano terminato ad esso, orientato come la gravità: quindi riferendosi alla stessa origine come polo del momento, oppure osservando che si ha, nel presente caso, coll'indicato significato dei simboli,

$$L\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}, \quad W = Mg\bar{z} = Mgs\sin i\cos\varphi. \quad (2)$$

§ 81. — Ha qualche particolar interesse il caso che la retta sia prossimamente verticale: nel quale, attribuendo alla retta il senso d'alto in basso, per modo che i risulti assai piccolo, si ha prossimamente

$$L = -Mgsi\sin\varphi.$$

Questo è il caso di una « porta pesante », inteso ch' essa sia rappresentata sensibilmente da una figura del semipiano terminato all'asse, contenente il centro di massa, e l'asse corrisponda alla retta passante pei cardini. Concepito che « la porta » sia mantenuta in equilibrio, mediante l'applicazione di pressioni, il cui risultante è applicato ad un punto del relativo piano, e perpendicolare al piano medesimo, per modo che, indicando con a e P le grandezze della distanza del punto d'applicazione dall'asse e del risultante, aP è la grandezza del momento delle pressioni medesime rispetto alla retta, si ha, per condizione d'equilibrio, che il senso dei due momenti sia contrario, e le grandezze verifichino la relazione

$$aP = |Mgsi\sin\varphi|:$$

la quale implica varie circostanze di famigliare esperienza.

§ 82. — Principale importanza compete al caso che la retta sia orizzontale, nel quale il movimento in discorso si chiama quello del « pendolo composto ». Allora $i = \frac{\pi}{2}$, e l'equazione (1) diventa

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - M g s \sin\varphi,$$

o, posto

$$\frac{K}{M s} = l, \tag{1}$$

con che l rappresenta la misura di una lunghezza, più brevemente

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{g}{l} \sin\varphi. \tag{2}$$

Il teorema della conservazione dell'energia (§ 34) fornisce, tenendo calcolo di (1), e conformemente a (2) del § 80, l'integrale primo

$$\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = 2 \frac{g}{l} \cos\varphi + \frac{h}{l^2}, \tag{3}$$

dove la costante d'integrazione è rappresentata da $\frac{h}{l^2}$: equazione che si deduce, senz'altro, da (2), moltiplicando per $\frac{d\varphi}{d t}$ e integrando. Quest'equazione coincide, salvo il significato dei simboli, con (9) del § 77. Donde si deduce che il movimento in discorso si può concepire come comandato da quello di un pendolo semplice, di lunghezza misurata da l, mobile sul raggio passante pel centro di massa. Per la qual ragione, questo punto si chiama l' « indice » del pendolo composto, e la lunghezza misurata da l, la sua « lunghezza ridotta ».

Mediante (3) l'ulteriore integrazione è ridotta ad una quadratura ellittica.

La discussione del risultato di questa quadratura si fonda principalmente sulla circostanza che, ad un istante, sia nulla la velocità dell'indice, vale a dire che sia soddisfatta da valori reali di φ l'equazione

$$2\frac{g}{l}\cos\varphi+\frac{h}{l^2}=0, \tag{4}$$

la quale, posto

$$l\cos\varphi=z, \qquad l\frac{d\varphi}{dt}=\mathrm{v}, \tag{5}$$

con che z e v rappresentano la quota verticale e la misura della velocità dell'indice, si può scrivere

$$\frac{\mathrm{v}_0^2}{2}=g(z_0-z),$$

poichè, per (3)

$$h=\mathrm{v}_0^2-2gz_0;$$

ed esprime che detta circostanza si verificherà o no, secondo che è compresa o no fra le quote dell'indice quella da cui un punto grave, cadendo liberamente, acquista al livello iniziale dell'indice la velocità iniziale del medesimo.

Nel primo caso, conservando sempre $\frac{d\varphi}{dt}$ il segno iniziale, φ è sempre crescente o decrescente, e perciò il movimento è progressivo. Questo è il così detto «pendolo rivolutivo».

Nel secondo caso, indichino $-\alpha$ e α ($\alpha>0$) le radici di (4) comprese fra $-\pi$ e π, esclusi questi valori estremi, per trattare come limite il relativo caso. Ad un istante per cui $\varphi=-\alpha$, è $\frac{d\varphi}{dt}$ nullo, e, per (2), crescente, per modo che, negli istanti successivi, sarà $\frac{d\varphi}{dt}>0$, finchè non si annullerà di nuovo, ciò che accadrà quando φ da $-\alpha$ sarà *cresciuto* fino ad α. Ma a questo istante, per la stessa (2), $\frac{d\varphi}{dt}$ sarà decrescente, e perciò, negli

istanti successivi, $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, finchè non si annullerà di nuovo, ciò che accadrà quando φ da α sarà *decresciuto* a $-\alpha$, per tornar poi a crescere fino ad α, e così indefinitamente. Quindi il mobile oscillerà fra due posizioni simmetriche rispetto al piano verticale passante per la retta fissa, attraversando, alternativamente in un senso e nell'altro, questo piano, *sotto* la retta medesima. Tale è il caso particolarmente importante del «pendolo oscillante».

Chiaramente, poichè φ percorre, alternativamente in un senso e nell'altro, l'intervallo $(-\alpha, \alpha)$, e $\frac{d\varphi}{dt}$, per (3), gli stessi valori, cui va attribuito alternativamente un segno e l'altro, basta conoscere il movimento dal passaggio per una posizione estrema al consecutivo per l'altra — ciò che si chiama una « mezza oscillazione »: dal quale si dedurrà immediatamente il movimento in ogni eguale intervallo di tempo susseguente. Mentre poi, nello studio di una mezza oscillazione, basta considerare il movimento fra due consecutivi passaggi per la posizione più bassa e per una posizione estrema, perchè, per (3), nel movimento complementare, $\frac{d\varphi}{dt}$ riceve, in ordine inverso, la stessa successione di valori: donde segue che questo movimento sarà simmetrico dell'altro rispetto alla posizione più bassa, e al tempo del passaggio per essa.

Da

$$2\frac{g}{l}\cos\alpha + \frac{h}{l^2} = 0$$

e da (3) si ricava, in primo luogo,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right) = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right):$$

donde, supposto, conformemente al precedente discorso, $\frac{d\varphi}{dt} \geqq 0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \tag{6}$$

dove i radicali vanno presi col segno $+$. Introducendo una nuova variabile ϑ, con

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\vartheta, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} \gtreqless 0,$$

quest'equazione si riduce, con breve calcolo, a

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta}, \qquad -\frac{\pi}{2} \overline{\lessgtr} \vartheta \overline{\lessgtr} \frac{\pi}{2},$$

la quale, stabilito che per $t = 0$ sia $\varphi = 0$, e perciò $\vartheta = 0$, fornisce

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta}},$$

e, in particolare, per espressione della durata di una mezza oscillazione,

$$2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta}}.$$

§ 83. — Posizioni d'equilibrio sono le due per cui il centro di massa si trova nel piano verticale passante per la retta fissa, sotto o sopra di essa. La prima è posizione d'equilibrio instabile, perchè, suppostovi, ad un istante, il solido, ne segue, con qualunque forza viva, per piccola che sia, il caso del pendolo rivolutivo. La seconda è invece posizione d'equilibrio stabile, come la designa, senz'altro, il teorema di Dirichlet (§ 45), e si può direttamente riconoscere, osservando che, con una forza viva iniziale abbastanza piccola, si ha il caso del pendolo oscillante, in seguito a che, essendo, per (5) e (6),

$$\sin^2\frac{\varkappa}{2} = \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{2}{\sqrt{gl}}v_0^2,$$

questa stessa condizione, e quella che la posizione iniziale sia abbastanza vicina alla più bassa, bastano perchè risultino a piacere vicine alla medesima le posizioni estreme.

§ 84. — Supposto verificato il movimento pendolare oscillatorio con α, e, per conseguenza, con φ, abbastanza piccolo perchè si possa sensibilmente sostituire φ a $\sin\varphi$, la (2) del § 82 si può sostituire con

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi,$$

che si integra immediatamente con

$$\varphi = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(-A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

per cui

$$A = \varphi_0, \qquad B = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0.$$

E quest'equazione definisce un movimento armonico, la durata del cui periodo è espressa da

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Così, questa durata riesce, prescindendo da un errore trascurabile, indipendente dall'ampiezza. In ciò consiste l'« isocronismo delle piccole oscillazioni », che è fra i fatti sperimentali più notorii.

Seguito - Integrazione dell'equazione del pendolo composto per mezzo delle funzioni ellittiche. *

§ 85. — Teniamo presenti le relazioni [(3) del § 67]

$$\frac{dx}{du} = a\,y\,z \tag{1}$$

dove, rappresentando x una delle tre funzioni ellittiche

$$\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn} u \qquad (\text{mod. } \varkappa),$$

y e z rappresentano le due rimanenti, e a deve scegliersi come risulta da

$$x = \begin{cases} \operatorname{sn} u \\ \operatorname{cn} u \\ \operatorname{dn} u \end{cases} \qquad a = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ -\varkappa^2 \end{cases} ; \tag{2}$$

dalle quali relazioni si deduce pure immediatamente

$$\int \operatorname{cn} u\, du = \frac{1}{\varkappa} \arcsin \varkappa \operatorname{sn} u, \qquad \int \operatorname{dn} u\, du = \operatorname{am} u. \tag{3}$$

L'equazione del pendolo [(2) del § 82]

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi,$$

in cui t rappresenta il tempo, φ l'angolo di rotazione, contato dal semipiano nadirale (orientato come la gravità), terminato all'asse, l la così detta lunghezza del pendolo, e g l'accelera-

---

* V. *G. A. Maggi: Sulla teoria del pendolo.* (Giornale di Matematiche. Vol. XXXVIII. 1900).

zione di gravità, posta sotto la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \tag{4}$$

suggerisce, per (1) e (3), le soluzioni

$$\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt} = \varkappa\lambda\,\mathrm{cn}(\lambda t + \mu), \qquad \frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt} = \lambda\,\mathrm{dn}(\lambda t + \mu); \tag{5}$$

la prima nell'ipotesi che la velocità angolare possa annullarsi per qualche valore del tempo, e la seconda in quella che non possa [cfr. (6) del § 67].

Aggiungiamo le condizioni iniziali

$$t = 0: \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}_0 > 0, \tag{6}$$

e poniamo inoltre

$$v_0 = l\,\dot{\varphi}_0,$$

per modo che v_0 rappresenti la grandezza della velocità dell'indice al supposto istante iniziale, a cui l'indice riesce nel semi piano nadirale terminato all'asse.

Nel primo caso abbiamo

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin \varkappa\,\mathrm{sn}(\lambda t+\mu), \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \varkappa\,\mathrm{sn}(\lambda t+\mu), \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \mathrm{dn}(\lambda t+\mu);$$

donde, per (4) e (1), (2)

$$\lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Quindi, per (6):

$$0 = \mathrm{sn}\,\mu, \qquad \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{l} = 2\varkappa\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{cn}\,\mu;$$

dalle quali, posto

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\vartheta}}.$$

e indicando con n un intero qualsivoglia, si ricava [cfr. (6) e (2) del § 67]

$$\mu = 4n\,\omega, \qquad \varkappa = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{v_0}{2\sqrt{g\,l}}.$$

E dovendo essere soddisfatta la condizione

$$\varkappa < 1, \tag{7}$$

si vede che l'ipotesi in discorso si verifica quando

$$v_0 < \sqrt{2 .\, g .\, 2\,l}\,:$$

cioè la velocità dell'indice nel semipiano nadirale — vale a dire al livello più basso raggiungibile da quel punto — minore di quella che corrisponde alla sua caduta libera dal più alto.

Nel secondo caso abbiamo invece

$$\frac{\varphi}{2} = \mathrm{am}(\lambda t + \mu), \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \mathrm{sn}(\lambda t + \mu), \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \mathrm{cn}(\lambda t + \mu),$$

donde, per (4) e (1), (2)

$$\varkappa^2 \lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Quindi, per (6):

$$0 = \mathrm{sn}\,\mu, \qquad 1 = \mathrm{cn}\,\mu, \qquad \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{l} = 2\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{dn}\,\mu\,;$$

dalle quali si ricava

$$\mu = 4n\,\omega, \qquad \varkappa = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{1}{\dot\varphi} = \frac{2\sqrt{g\,l}}{v_0},$$

con che

$$\lambda = \frac{\dot\varphi_0}{2} = \frac{v_0}{2\,l}.$$

E per la condizione (7), l'ipotesi in discorso si verifica, quando

$$v_0 > \sqrt{2.\,g.\,2\,l},$$

cioè la velocità dell'indice nel semipiano nadirale maggiore di quella che corrisponde alla caduta libera dal più alto livello raggiungibile dal punto stesso.

Le due ipotesi hanno comune il caso limite

$$\varkappa = 1, \qquad v_0 = \sqrt{2.\,g.\,2\,l}\,.$$

Difatti, con $\varkappa = 1$, si ha, per degenerazione,

$$\operatorname{sn} u = \tanh u \qquad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \operatorname{sech} u.$$

Quindi, per le precedenti relazioni,

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \mu = 0.$$

E da

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sech}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

segue $t = \infty$ per $\varphi = \pi$: cioè riesce infinita, cominciando dal supposto istante iniziale, la durata della mezza rivoluzione, o della mezza oscillazione, secondo l'ipotesi a cui si attribuisce il caso limite in discorso.

Principio dell'equilibrio relativo della bicicletta.

[Esempio III, § 17].

§ 86. — Un solido contiene una retta vincolata a moversi in un piano orizzontale, colla condizione che, ad ogni istante, tocchi la trajettoria di un suo punto, A, nel suo posto all'istante considerato, e formi un angolo invariabile colla tangente alla trajettoria di un altro suo punto, B, nel posto che gli compete allo stesso istante. Il movimento del punto A è uniforme. Le forze impresse si riducono alla gravità. Si tratta di studiare l'equilibrio del solido relativo ad una terna d'assi, dei quali uno è formato colla retta vincolata, e un altro è verticale. Questo problema si applica alla ricerca delle relazioni fra le circostanze del movimento di una bicicletta (inclinazione, velocità, raggio di curvatura della trajettoria dei punti d'appoggio), occorrenti perchè la bicicletta si regga, ammesso che, colla richiesta approssimazione, si possa equiparare il movimento della macchina a quello di un sistema rigido, trascurando l'influenza del movimento particolare del cavaliere e delle ruote sulle relazioni medesime. Va inteso con questo che il piano orizzontale rappresenti il suolo, A il punto di contatto della ruota motrice, B quello della ruota direttrice, sensibilmente confuso col punto d'intersezione dell'asse del timone, e la tangente alla trajettoria di B la traccia sul suolo del piano della stessa ruota direttrice.

Indichi C il punto d'intersezione delle normali alle trajettorie dei due punti A e B ad un istante qualsivoglia. Il triangolo $A\,B\,C$, per le precedenti condizioni, deve restare rettangolo in A, e mantenere invariabili le grandezze del lato $A\,B$ e dell'angolo $A\,C\,B$, e, per conseguenza, restar invariabile. Donde si ricava, innanzi tutto, perchè C sarà il centro istantaneo del movimento della retta, che questo movimento risulta rotatorio intorno alla verticale di C come asse. Sarà poi rotatorio uniforme, perchè il moto del punto A è supposto uniforme: e, indicando con R e con v la grandezza del raggio del cerchio descritto

da A e della velocità dello stesso punto, la grandezza ω della velocità angolare sarà espressa da

$$\omega = \frac{v}{R}. \qquad (1)$$

Ciò premesso, l'equazione pura del considerato equilibrio relativo si troverà col modello dell'Esempio III (§ 47), componendo colle forze di gravità le forze centrifughe competenti al suddetto movimento rotatorio uniforme *.

Assumiamo A per origine degli assi mobili, la verticale in A, volta in alto, per asse delle z, l'orizzontale passante per C, volta verso C, per asse delle y, e la retta AB, presa nel senso che risulta da quelli, per asse delle x. Indichi φ la misura dell'angolo formato dal semipiano terminato alla retta AB, ossia all'asse delle x, contenente il centro di massa del solido, col semipiano analogo verticale, volto in alto, crescente nel senso del giro positivo rispetto all'asse delle x (quindi negativo dalla parte delle y positive, ossia di C): M, s e g le grandezze della massa del solido, della distanza del suo centro di massa da AB, e dell'accelerazione di gravità. La componente secondo l'asse delle x del momento delle forze di gravità, rispetto ad un punto qualunque di esso, ha per espressione **

$$M g s \sin\varphi.$$

La stessa componente del momento delle forze centrifughe, essendo [cfr. (4) e (6) del § 6]

$$\omega^2 x, \qquad \omega^2 (y - R), \qquad 0$$

le componenti dell'accelerazione centrifuga del punto generico (x, y, z), risulta parimente

$$-\omega^2 \int_\tau \kappa (y - R) z \, d\tau = -\omega^2 (D - M R \bar{z}).$$

* *Meccanica*, § 236.

** Cfr. § 82, avvertendo l'inversione del semipiano donde si conta l'angolo φ.

Supponiamo ora, per semplicità, che il mobile si possa considerare come sensibilmente compreso nel semipiano terminato ad AB, contenente il centro di massa. Con questo si trova subito, indicando con K il momento d'inerzia rispetto ad AB,

$$D = -K \sin\varphi \cos\varphi.$$

Quindi la cercata equazione d'equilibrio risulta

$$Mgs \sin\varphi + \omega^2 (MRs + K \sin\varphi) \cos\varphi = 0, \tag{2}$$

ossia

$$\omega^2 = -\frac{Mgs}{MRs + K\sin\varphi} \tan\varphi: \tag{3}$$

che se si concede di poter trascurare, per φ abbastanza piccolo, il secondo termine del denominatore in confronto del primo, se ne ricava, richiamando (1),

$$\tan\varphi = -\frac{v^2}{Rg}. \tag{4}$$

Quest' equazione fornisce immediatamente diverse circostanze verificate dall' esperienza. Osserviamo, in particolare, come se ne possa ricavare il fatto che, per raddrizzare la macchina, occorre girare il timone dalla parte donde essa inclina; poichè, per ristabilire (4), con $|\varphi|$ cresciuto, bisogna diminuire R, cioè accostare C ad AB, o, infine, accrescere anche l'angolo formato con AB dalla traccia della ruota direttrice sul suolo.

La posizione eretta è d'equilibrio instabile. Difatti, il movimento relativo agli stessi assi è determinato dall'equazione pura (§ 47, *Esempio III*) *

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mgs \sin\varphi + (\omega^2 MRs + K \sin\varphi)\cos\varphi,$$

* Il momento rispetto all'asse delle x delle forze centrifughe composte è nullo.

che ammette l'integrale primo

$$\frac{1}{2} K \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -Mgs\cos\varphi + \omega^2 MRs\sin\varphi - \frac{1}{2}\omega^2 K\cos 2\varphi + \text{cost.} \quad (5)$$

deducibile, o moltiplicando per $\frac{d\varphi}{dt}$ e integrando, o applicando il teorema della conservazione dell'energia (§ 34)*. Ora, da (5) segue che $\frac{1}{2} K \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, nella posizione determinata da (3), riceve un valor minimo, perchè, per (2), riesce nulla la sua derivata prima, e, supposto $|\varphi|$ piccolo, si ha, per (4), $\varphi < 0$, e la derivata seconda

$$Mgs\cos\varphi - \omega^2 MRs\sin\varphi + 2\omega^2 K\cos 2\varphi$$

vi riceve un valore positivo. Ne viene che, concepito il mobile in quella posizione, con una forza viva comunque piccola, questa non si annullerà a nessun istante: con che il movimento sarà rivolutivo, e la posizione non potrà contenersi entro confini preventivamente assegnati (cfr. § 83).

Avvertiamo che al vero movimento relativo risponde più propriamente l'ipotesi che l'angolo di cui si gira il timone rappresenti un'altra variabile indipendente. La precedente si riduce a quella che detto angolo si mantenga costante, trascurando quantità di secondo ordine rispetto all'inclinazione φ sulla verticale.

L'instabilità corrisponde al fatto che il cavaliere deve, con costante maneggio, procurare che la bicicletta non si rovesci.

§ 87. — *Reazione del suolo.* Le pressioni vincolari relative al vincolo imposto al movimento in discorso traducono le reazioni del suolo, per mezzo delle quali è inteso che lo stesso vincolo riesca soddisfatto. Ora, il risultante e il momento rispetto al punto A di queste pressioni, essendo

$$0, \quad 0, \quad -g, \qquad \omega^2 x, \quad \omega^2(y - R), \quad 0$$

* Cfr. *Meccanica*, § 327.

le componenti dell'accelerazione di gravità e centrifuga, sono dati (§ 36) da

$$X' = -\omega^2 M\bar{x}, \quad Y' = \omega^2 MR, \quad Z' = Mg,$$
$$L' = 0 \quad M' = -Mg\bar{x} - \omega^2 E, \quad N' = \omega^2 MR\bar{x},$$

posto

$$E = \int_\tau \varkappa x z \, d\tau.$$

Ne scaturisce che le pressioni vincolari in discorso sono rappresentate da una pressione di grandezza Mg — peso della macchina montata — avente l'orientazione della verticale volta in alto, applicata al centro di massa: da una pressione di grandezza $\omega^2 MR$, perpendicolare alla retta dei punti d'appoggio delle due ruote, volta dalla parte del comun centro di curvatura delle loro trajettorie, applicata alla projezione del centro di massa sulla stessa retta: da una pressione di grandezza $\omega^2 M|\bar{x}|$, avente l'orientazione di AB, volta in un certo senso, applicata al punto A: infine da un momento, di grandezza $\omega^2 |E|$, avente l'orientazione dell'orizzontale perpendicolare ad AB, volta in un certo senso.

La prima traduce la resistenza del suolo a sostenere il peso della macchina, e introduce la condizione

$$Mg < \lambda,$$

dove λ indica un termine commisurato al limite di resistenza al sostegno di un carico della materia che s'intende comporre il suolo.

La seconda traduce un effetto dell'attrito dello stesso suolo, e introduce, conformemente alle leggi dell'attrito (§ 59) (si noti che la suddetta projezione è assai prossima ad A), la condizione

$$\omega^2 MR \leqq \mu Mg,$$

dove μ indica il coefficiente di attrito statico (§ 59): ossia, per (4),

$$-\tan\varphi \leqq \mu,$$

che stabilisce una relazione fra il limite superiore delle pendenze

ed essendo questo risultante applicato al centro di massa, è nullo il momento delle stesse forze di gravità così rispetto al centro di massa, come al punto a contatto, che si trova sulla verticale passante per esso.

Nella seconda fase, le forze impresse si riducono a queste. Nella prima fase aggiungeremo le pressioni di attrito radente. Ora, indicate con x, y, z e con x^*, y^*, z^* le coordinate del centro di massa e del punto a contatto, essendo

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = 0, \qquad z = R, \tag{1}$$

la velocità del punto a contatto avrà per componenti

$$\frac{dx}{dt} - Rq, \qquad \frac{dy}{dt} + Rp, \qquad 0,$$

dinotando p, q, r, al solito, le componenti della velocità angolare secondo gli assi fissi. D'altra parte, le componenti del risultante delle pressioni vincolari, calcolate, omettendo, nel computo delle forze impresse, le pressioni d'attrito, riescono (§ 26),

$$0, \qquad 0, \qquad M\frac{d^2 z}{dt^2} + Mg = Mg.$$

Quindi, posto

$$\text{v} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} - Rq\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + Rp\right)^2},$$

e indicato con μ un coefficiente numerico positivo, le componenti del risultante delle pressioni d'attrito radente saranno

$$-\mu Mg\frac{\frac{dx}{dt} - Rq}{\text{v}}, \quad -\mu Mg\frac{\frac{dy}{dt} + Rp}{\text{v}}, \quad 0;$$

e questo risultante è applicato al punto a contatto: il che vuol dire che è nullo il momento delle pressioni stesse rispetto a questo punto (§ 59).

Le equazioni del movimento si formeranno col modello trovato per l'Esempio V e per l'Esempio VI nel § 47. In ambedue le fasi si verifica il teorema del momento delle forze d'inerzia rispetto al punto a contatto, secondo ogni asse passante per questo punto (§ 33): e questo ha per componenti secondo gli assi fissi

$$\frac{2}{5} M R^2 \frac{dp}{dt} - R M \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{2}{5} M R^2 \frac{dq}{dt} + R M \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{2}{5} M R^2 \frac{dr}{dt}:$$

come si trova, osservando che la quantità di moto areale rispetto al centro di massa ha per componenti secondo gli stessi assi fissi (§ 9),

$$K p, \qquad K q, \qquad K r \qquad \left(K = \frac{2}{5} M R^2\right),$$

e valendosi delle (1), e della formola generale * pel trasporto del polo da (x, y, R) a $(x, y, 0)$. Inoltre, nella prima fase, si verifica, secondo ogni asse parallelo al piano, il teorema del movimento del centro di massa (§ 32).

Si conclude, posto, per brevità di scrittura,

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v,$$

donde

$$\mathrm{v} = \sqrt{(u - R q)^2 + (v + R p)^2},$$

che, nella prima fase, un sistema di equazioni pure del movimento sarà composto delle cinque equazioni

$$\frac{du}{dt} = -\mu g \frac{u - R q}{\mathrm{v}}, \qquad \frac{dv}{dt} = -\mu g \frac{v + R p}{\mathrm{v}}, \tag{2}$$

$$\frac{2}{5} R \frac{dp}{dt} - \frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{2}{5} R \frac{dq}{dt} + \frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dr}{dt} = 0: \tag{3}$$

---

* *Meccanica*, § 46.

e, nella seconda fase, delle tre ultime di queste, colle condizioni

$$u - R q = 0, \qquad v + R p = 0. \tag{4}$$

Le (3), integrando, forniscono immediatamente

$$\frac{2}{5} R(p - p_0) = v - v_0, \quad \frac{2}{5} R(q - q_0) = u_0 - u, \quad r - r_0 = 0. \tag{5}$$

Per le prime due,

$$u - R q = \frac{7}{2}(u - a), \qquad v + R p = \frac{7}{2}(v - b), \tag{6}$$

posto

$$a = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} u_0 + R q_0\right), \qquad b = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} v_0 - R p_0\right). \tag{7}$$

Introducendo le (6) in (2), se ne ricava

$$\frac{d u}{u - a} = \frac{d v}{v - b},$$

donde

$$\frac{u - a}{u_0 - a} = \frac{v - b}{v_0 - b} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_0}:$$

con che le stesse due equazioni si possono scrivere:

$$\frac{d u}{d t} = \frac{d^2 x}{d t^2} = -\mu g \frac{u_0 - a}{\mathrm{V}_0}, \quad \frac{d v}{d t} = \frac{d^2 y}{d t^2} = -\mu g \frac{v_0 - b}{\mathrm{V}_0}; \tag{7}$$

equazioni del movimento parabolico, corrispondente all'accelerazione costante, di grandezza μg, parallela al piano fisso, e avente per coseni di direzione secondo gli assi delle x e delle y $\frac{u_0 - a}{\mathrm{V}_0}$, $\frac{v_0 - b}{\mathrm{V}_0}$; il quale si riduce ad un movimento rettilineo uniformemente accelerato, quando $u_0 = v_0 = 0$ (la velocità del

centro di massa nulla) o $u_o : v_o = u_o - a : v_o - b$, vale a dire $u_o : v_o = a : b$, e, per (7), $u_o p_o + v_o q_o = o$ (la velocità angolare nulla o perpendicolare alla velocità del centro di massa). Riescono poi a, b, per le (6), le componenti della velocità del centro di massa all'istante in cui si annulla la velocità del punto a contatto, e comincia la seconda fase.

Le (8), donde scaturiscono

$$u - u_o = -\mu g \frac{u_o - a}{V_o} t, \qquad v - v_o = -\mu g \frac{v_o - b}{V_o} t,$$

forniscono per questo istante il tempo $t = \frac{V_o}{\mu g}$. E con questo le equazioni

$$x - x_o = u_o t - \frac{1}{2} \mu g \frac{u_o - a}{V_o} t^2, \quad y - y_o = v_o t - \frac{1}{2} \mu g \frac{v_o - b}{V_o} t^2,$$

che se ne ricavano, con una seconda integrazione, forniscono il relativo posto del centro di massa.

Nella seconda fase, collegando le (4), cioè

$$\frac{du}{dt} - R \frac{dq}{dt} = o, \qquad \frac{dv}{dt} - R \frac{dp}{dt} = o.$$

colle prime due delle (3), si ottiene

$$\frac{du}{dt} = o, \quad \frac{dv}{dt} = o, \quad \frac{dp}{dt} = o, \quad \frac{dq}{dt} = o.$$

Per modo che per $t \gtreqless \frac{V_o}{\mu g}$ si ha

$$u = a, \quad v = b, \quad p = -\frac{b}{R}, \quad q = \frac{a}{R}, \quad r = r_o :$$

il movimento del centro di massa è rettilineo uniforme, e la velocità angolare è costante. Che se $a = b = o$, cioè, per (7), $q_o = -\frac{2}{5} R u_o$, $p_o = \frac{2}{5} R v_o$, in conseguenza di che $u_o p_o + v_o q_o = o$,

il movimento, nella seconda fase, si riduce rotatorio uniforme intorno ad un asse perpendicolare al piano.

Problema del movimento impulsivo e formazione del relativo sistema di equazioni pure.

§ 90. — Sembra, in certi casi, che, ad un determinato istante, l'atto di movimento del mobile cessi di variare con continuità col tempo, ma possieda un diverso limite, col tendere del relativo istante a quello, secondo che è anteriore o posteriore. In tal caso, ambedue questi limiti si attribuiscono all'istante singolare in discorso, e si distinguono coi nomi di « atto di movimento anteriore » e « atto di movimento posteriore », ambedue relativi all'istante medesimo. Tale è il caso di una palla da bigliardo, al momento che viene colpita dalla stecca, di una palla di piombo, al momento che, cadendo, arriva a terra, di una bomba, al momento che scoppia, e via discorrendo.

Questa non è propriamente che un'apparenza, dovuta alla rapidissima variazione dell'atto di movimento, in prossimità dell'istante considerato. Le leggi generali non patiscono, per questo, alcuna eccezione. Ma, pel calcolo del movimento, si presenta il problema di determinare uno dei due atti di movimento, dato l'altro e le circostanze determinanti l'apparente discontinuità: e, reciprocamente, queste, data la loro differenza.

Il problema si risolve, coi principii generali precedentemente esposti, ammettendo che, in un intervallo, comprendente l'istante considerato, così breve da potersi trattare come inapprezzabile al cronometro, e perciò tale che, nel corso di esso, la posizione del mobile non muta sensibilmente, si aggiungano particolari forze impresse, così grandi che riesce apprezzabile l'integrale rispetto al tempo, esteso a quell'intervallo, del loro risultante e del loro momento relativo ad un punto qualsivoglia.

Ciò premesso, corrisponda il considerato istante a $t = 0$, e indichiamo con -0 e $+0$ i tempi corrispondenti agli estremi del suddetto intervallo, che lo comprende. Le coordinate del sistema e i parametri dell'atto di movimento virtuale si dovranno, nel corso di questo intervallo, considerare come costantemente rappresentate dai valori che loro competono a $t = 0$, cioè all'i-

stante singolare. Donde segue che, integrando rispetto a t, fra -0 e $+0$, l'equazione di d'Alembert e Lagrange (§ 28), applicata al considerato sistema, otteniamo

$$\Sigma\left\{\left(\int_\tau k\,Du\,d\tau-\Xi\right)l'+\ldots+\left(\int_\tau k[(y-b)Dw-(z-c)Dv]d\tau-\Lambda\right)p'+\right\}=0 \quad (1)$$

dove D indica la differenza fra il valore a $+0$ e quello a -0, si è posto

$$\int_{-0}^{+0} \mathrm{X}\,dt=\Xi, \qquad \int_{-0}^{+0} \mathrm{L}\,dt=\Lambda, \qquad (2)$$

e gli altri simboli conservano il precedente significato.

Avvertiamo che, il contributo delle ordinarie forze impresse riuscendo insensibile nelle (2), per la loro moderata grandezza, e la estrema piccolezza dell'intervallo d'integrazione, i vettori le cui componenti sono indicate da

$$\Xi,\ \Upsilon,\ \mathrm{Z}, \qquad \Lambda,\ \mathrm{M},\ \mathrm{N}$$

(le lettere aggiunte a quelle che figurano in (2) s'intendono manifestamente definite in modo analogo) dipenderanno essenzialmente dalle condizioni determinanti la discontinuità. Si chiamano il risultante degli impulsi e il momento degli impulsi rispetto al punto (a, b, c), applicato al pezzo rigido a cui si riferiscono gli elementi posti in evidenza.

Intesi i vincoli rappresentati da

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma(L_i\,l+M_i\,m+N_i\,n+P_i\,p+Q_i\,q+R_i\,r)=T_i,\\ (i=1,2\ldots\mu)\end{array}\right\}(3)$$

(§ 14), si dovrà poi collegare con (1)

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma(L_i\,l'+M_i\,m'+N_i\,n'+P_i\,p'+Q_i\,q'+R_i\,r')=0\\ (i=1,2,\ldots\mu)\end{array}\right\}(4)$$

(§ 22). Oltre di che da (3), mantenendo L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i sensibilmente il valore che loro compete per $t=0$, si ricava

$$\Sigma(L_i\,\mathrm{D}l+M_i\,\mathrm{D}m+N_i\,\mathrm{D}n+P_i\,\mathrm{D}p+Q_i\,\mathrm{D}q+R_i\,\mathrm{D}r)=0. \quad (5)$$

E si ha [cfr. (7) del § 1]

$$\left.\begin{aligned} Du &= Dl + (z-c)Dq - (y-b)Dr \\ Dv &= Dm + (x-a)Dr - (z-c)Dp \\ Dw &= Dn + (y-b)Dp - (x-a)Dq. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Tanto basta per concludere che lo stesso procedimento adoperato per dedurre le equazioni pure del movimento ordinario (§ 30), applicato alla (1), ci fornirà, in ogni caso, $\nu - \mu$ equazioni lineari omogenee fra le

$$\int_\tau \varkappa\, Du\, d\tau - \Xi, \quad \ldots \quad \int_\tau \varkappa[(y-b)Dw - (z-c)Dv]d\tau - \Lambda, \quad \ldots$$

le quali, mediante le (6), si riducono ad altrettante equazioni tra le Dl, Dm, Dn, Dp, Dq, Dr relative a tutti i pezzi rigidi, atte a fornire, combinate colle μ equazioni (5), le differenze medesime, e a risolvere il proposto problema.

Queste equazioni formano ciò che chiameremo un sistema di «equazioni pure del movimento impulsivo».

Un tipo generale di equazioni pure, conforme alle (5) del § 30, sarà

$$\Sigma \left\{ E_j^{(l')}\left(\int_\tau \varkappa Du\, d\tau - \Xi\right) + \cdots + E_j^{(p')}\left(\int_\tau \varkappa[(y-b)Dw - (z-c)Dv]d\tau - \Lambda\right) + \cdots \right\} = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots \nu - \mu)$$

dove i coefficienti conservano lo stesso significato: cioè s'intende, conformemente a (4),

$$l' = \Sigma_j E_j^{(l')} \varepsilon_j, \quad \ldots \quad p' = \Sigma_j E_j^{(p')} \varepsilon_j \quad \ldots$$

S'intende come tale relazione fra le equazioni che risolvono il problema permetta, a parità di vincoli, di dedurre le proprietà del movimento impulsivo da quella del movimento ordinario, e viceversa, scambiando fra loro, da una parte, gli elementi omologhi delle forze impresse e degli impulsi, dall'altra, quelli che si riferiscono al sistema delle accelerazioni e al sistema delle differenze della velocità.

§ 91. — Supponiamo i vincoli indipendenti dal tempo, per modo che l'atto di movimento effettivo, anteriore e posteriore all'istante singolare, siano atti di movimento virtuali. La (1), previamente posta sotto la forma [cfr. (1) del § 22],

$$\Sigma \int \varkappa \left(D\, u\, \delta x + D\, v\, \delta y + D\, w\, \delta z \right) d\tau = \Sigma \left(\Xi\, l' + \ldots + \Lambda\, p' + \ldots \right),$$

fornisce immediatamente, facendovi $l' = l^{-o}$, ... $p' = p^{-o}$ ... ossia $\delta x = u^{-o}$, $\delta y = v^{-o}$, $\delta z = w^{-o}$, poi $l' = l^{+o}$, ... $p' = p^{+o}$, ... ossia $\delta x = u^{+o}$, $\delta y = v^{+o}$, $\delta z = w^{+o}$, e, sommando i due risultati,

$$\left. \begin{aligned} D\,T = \Sigma \Big(& \Xi \frac{l^{-o} + l^{+o}}{2} + \Upsilon \frac{m^{-o} + m^{+o}}{2} + Z \frac{n^{-o} + n^{+o}}{2} + \\ & + \Lambda \frac{p^{-o} + p^{+o}}{2} + M \frac{q^{-o} + q^{+o}}{2} + N \frac{r^{-o} + r^{+o}}{2} \Big) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dove T, al solito indica la grandezza della forza viva.

Questa relazione importante si chiama talvolta il teorema della forza viva relativo al movimento impulsivo.

Applicazione alla teoria dell'urto di due corpi rigidi.

§ 92. — Supponiamo che due corpi rigidi, il cui contorno sia tutto convesso, riescano a mutuo contatto ad un certo istante ($t = 0$), al quale, secondo i precedenti concetti, competono due distinti atti di movimento, anteriore e posteriore, dei due corpi. Si dice che, a quell'istante, ha luogo l' « urto » dei due corpi: e si presenta il problema di determinare l'atto di movimento posteriore (definito per ciascun corpo dalla velocità del centro di massa e dalla velocità angolare), dato l'atto di movimento anteriore (egualmente definito), e il sistema degli impulsi applicati alla superficie dei due corpi all'istante considerato.

Ammettiamo (ipotesi dell' « urto senza attrito ») che il risultante di questo sistema, in ambedue i corpi, sia applicato al punto

a contatto, abbia per orientazione quella della normale al contorno volta verso l'interno del corpo, e grandezza eguale, così da riuscire nei due corpi eguale e di senso opposto.

Si aggiunge poi la condizione che, indicando con N_1^{-o}, N_2^{-o} le componenti della velocità anteriore del punto a contatto di ciascuno dei due corpi (che distinguiamo d'or in avanti cogli indici 1 e 2) secondo la normale al contorno nello stesso punto, volta verso l'interno del corpo, abbiasi

$$N_1^{-o} + N_2^{-o} < 0, \qquad (1)$$

ciò che vuol dire esser volta verso l'esterno del corpo l'una e l'altra componente, o per lo meno quella di maggior valore assoluto (avanti l'istante dell'urto i due corpi si vengono mutuamente incontro, o il più veloce assale il più lento).

E giova premettere anche l'altra condizione che, indicando analogamente con N_1^{+o}, N_2^{+o} le componenti della velocità posteriore del punto a contatto di ciascuno dei due corpi, secondo gli stessi assi, abbiasi

$$N_1^{+o} + N_2^{+o} \gtreqqless 0, \qquad (2)$$

la quale esprime che la componente secondo la normale al punto a contatto volta in un senso determinato della velocità posteriore di questo punto, è la stessa per ambedue i corpi, oppure che almeno quella delle due componenti medesime a cui compete maggior valore assoluto è volta verso l'interno del corpo corrispondente (dopo l'istante dell'urto i due corpi si mantengono a contatto, oppure si staccano).

Tutto ciò premesso, indicando, per ciascun corpo, con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ le coordinate del punto a contatto rispetto alla terna degli assi centrali d'inerzia, con α, β, γ i coseni di direzione della normale al contorno in questo punto volta verso l'interno, con M la massa, con P, Q, R i momenti principali centrali d'inerzia, con $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ le componenti secondo i suddetti assi della velocità del centro di massa, e con $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ le componenti secondo gli stessi assi della velocità angolare — applicando a tutte queste lettere l'indice 1 o 2 secondo che appartengono ad un corpo o all'altro, e alle ultime sei, in alto, $+o$ oppure $-o$ secondo che si tratta dell'atto di movimento anteriore o posteriore; oltre di che, indi-

çando con Π la grandezza comune del risultante degli impulsi, abbiamo

$$\left.\begin{array}{c} M(\mathfrak{u}^{+o}-\mathfrak{u}^{-o})=\Pi\alpha,\quad M(\mathfrak{v}^{+o}-\mathfrak{v}^{-o})=\Pi\beta,\quad M(\mathfrak{w}^{+o}-\mathfrak{w}^{-o})=\Pi\gamma \\ P(\mathfrak{p}^{+o}-\mathfrak{p}^{-o})=\Pi(\mathfrak{b}\gamma-\mathfrak{c}\beta) \\ Q(\mathfrak{q}^{+o}-\mathfrak{q}^{-o})=\Pi(\mathfrak{c}\alpha-\mathfrak{a}\gamma) \\ R(\mathfrak{r}^{+o}-\mathfrak{r}^{-o})=\Pi(\mathfrak{a}\beta-\mathfrak{b}\alpha), \end{array}\right\} \qquad (3)$$

dodici equazioni fra tredici incognite, non essendo Π ancora determinato.

Notiamo, in primo luogo, come dalla prima terna scaturisca che la componente della velocità del centro di massa di ciascun corpo secondo ogni asse parallelo al pian tangente al contorno nel punto a contatto abbia lo stesso valore nell'atto di movimento anteriore e posteriore: e dalla seconda, che mantiene parimente lo stesso valore la componente della velocità angolare secondo un asse normale.

Si ricava poi dalle stesse formole

$$\frac{\mathfrak{u}^{+o}+\mathfrak{u}^{-o}}{2}=\mathfrak{u}^{-o}+\frac{1}{2M}\Pi\alpha \qquad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{\mathfrak{p}^{+o}+\mathfrak{p}^{+o}}{2}=\mathfrak{p}^{-o}+\frac{1}{2P}\Pi(\mathfrak{b}\gamma-\mathfrak{c}\beta) \quad \ldots \quad \ldots$$

D'altra parte,

$$\mathfrak{X}=\Pi\alpha \quad \ldots \quad \mathfrak{L}=\Pi(\mathfrak{b}\gamma-\mathfrak{c}\beta) \quad \ldots$$

Quindi, per la (1) del § 91,

$$DT=-\left(2\frac{\varpi}{\Pi}-1\right)\mathrm{T} \qquad (4)$$

dove, posto, intendendo la sommatoria estesa ai due corpi,

$$\frac{1}{\mathrm{M}}=\Sigma\left(\frac{1}{M}+\frac{(\mathfrak{b}\gamma-\mathfrak{c}\beta)^2}{P}+\frac{(\mathfrak{c}\alpha-\mathfrak{a}\gamma)^2}{Q}+\frac{(\mathfrak{a}\beta-\mathfrak{b}\alpha)^2}{R}\right)$$

è

$$\varpi = - \mathrm{M} (N_1^{-0} + N_2^{-0}) \tag{5}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2\mathrm{M}} \Pi^2 .$$

Si rileva subito dalle (3) che, coll'ipotesi

$$\Pi = \varpi ,$$

si ha

$$N_1^{+0} + N_2^{+0} = 0,$$

mentre per (4), in tal caso

$$D\mathrm{T} = - \mathrm{T}.$$

Ora, per le stesse (3), T altro non è che la forza viva del sistema dei due corpi nell'ipotesi che la velocità di ciascun punto sia la differenza fra il valor anteriore e il valor posteriore della velocità del punto medesimo — ciò che si chiama « la forza viva delle velocità perdute, » ma meglio si chiamerà « forza viva delle differenze delle velocità ».

Quindi ϖ è la grandezza dell'impulso nel caso che, immediatamente dopo l'urto, i due corpi si mantengono a contatto, nel supposto punto: e in tal caso si ha, dall'atto di movimento anteriore al posteriore, una perdita di forza viva di grandezza eguale alla forza viva delle differenze delle velocità.

Se invece

$$\Pi = 2\varpi ,$$

la (4) fornisce

$$D\mathrm{T} = 0.$$

Vale a dire, se la grandezza dell'impulso è il doppio di quella che risponde alla precedente ipotesi, la differenza della forza viva è nulla. In questo caso, si trova subito, per (3),

$$N_1^{+0} + N_2^{+0} = - (N_1^{-0} + N_2^{-0}) :$$

con che la differenza delle componenti secondo un asse normale della velocità dei punti dei due corpi che fungono da punto di contatto è nei due atti di movimento, anteriore e posteriore, eguale e di senso opposto.

L'esperienza insegna che si ha, in ogni caso,

$$D\,\mathrm{T} \leqq 0,$$

ciò che costituisce un'altra condizione.

Per (4) e questa condizione si ha

$$\Pi \leqq 2\,\varpi. \tag{6}$$

Posto poi

$$\Pi = (1 + e)\,\varpi,$$

scaturendo dalle (3), tenuto presente (5),

$$N_1^{+o} + N_2^{+o} = \frac{\varpi\, e}{\mathrm{M}},$$

si deve supporre, per (2), $e \geqq 0$.

Quindi, per (6),

$$0 \leqq e \leqq 1.$$

Il numero e si chiama « coefficiente di restituzione ». I casi di $e = 0$, $e = 1$, $0 < e < 1$, si dicono rispettivamente dell'urto « anelastico », « perfettamente elastico » e « imperfettamente elastico ».

Per le (3) non può essere nulla la differenza della velocità del centro di massa per uno dei due corpi, se non è $\Pi = 0$, con che si annulla ogni altra differenza. Invece, sarà nulla per un corpo la differenza della velocità angolare quando sia, pel corpo,

$$\frac{\mathfrak{a}}{\alpha} = \frac{\mathfrak{b}}{\beta} = \frac{\mathfrak{c}}{\gamma},$$

cioè il centro di massa sulla normale al punto di contatto.

PARTE SECONDA

IL TEOREMA DI HAMILTON

Concetto più generale delle coordinate di un sistema.

§ 93. — Ci siamo valsi finora, per descrivere il movimento del sistema considerato, dei parametri, che abbiamo chiamato, a seconda del caso, coordinate normali (§ 14), e coordinate libere (§ 21). Ambedue queste specie di coordinate sono atte a determinare la posizione del sistema — le seconde, coll'intervento, per avventura, del tempo — conformemente a' suoi vincoli: e reciprocamente ne riescono determinati i valori, data una posizione del sistema, e, se occorre, il tempo, prescindendo dalla molteplicità di valori delle coordinate angolari, tra cui si può decidere col criterio della successione continua (cfr. § 3). Più in generale, chiameremo coordinate del sistema qualunque specie di parametri tali che ogni insieme di valori di essi, combinato, per avventura, con un valore del tempo, fornisca una posizione, a questo tempo, conforme al vincolo della rigidità dei singoli pezzi, di cui il sistema si suppone composto, e, s'intende, ai vincoli particolari del sistema: e, reciprocamente, riesca determinato da una posizione, soggetta a tali vincoli, coll'indicazione, eventualmente, del tempo, salvo una molteplicità di valori come la suddetta. Conformemente a ciò, e convenuto che ci limitiamo a considerare dipendenze regolari, intenderemo, qualunque sia la specie delle coordinate del sistema, che le coordinate ordinarie

del punto generico riescano funzioni regolari di esse, e, se capita, del tempo.

Segue dalla definizione che le coordinate di due diverse specie, appartenenti ad un medesimo sistema, saranno funzioni l'une dell'altre, e, nei debiti casi, del tempo. Quindi, se le coordinate di una specie sono in maggior numero di quelle d'un'altra, sussisteranno fra esse, in confronto dell'altre, tante relazioni di più quant'è la differenza dei due numeri: le quali potranno concepirsi ottenute coll'eliminare le seconde fra le espressioni delle prime in termini di esse.

Giova notare che, mentre ogni relazione (finita o differenziale) fra le coordinate normali rappresenta un vincolo imposto al sistema dei pezzi preventivamente supposti rigidi, le relazioni che si aggiungono col valersi di un numero maggiore di coordinate si dovranno considerare come intrinseche alle coordinate medesime, e subordinate alla rigidità dei singoli pezzi. La qual differenza di significato non dà luogo, del resto, ad alcuna distinzione nell'applicazione del seguìto procedimento, poichè, in ogni caso, il sistema mobile è semplicemente rappresentato dalle relative coordinate.

Intanto, da una parte, si mantiene inalterata la differenza fra il numero delle coordinate e quello delle condizioni: dall'altra, le condizioni che si sopprimono o si aggiungono sono sempre esprimibili per mezzo di un sistema di equazioni finite fra le coordinate — antiche o nuove, a seconda del caso — e, occorrendo, il tempo.

Quindi il numero dei gradi di libertà del sistema mobile, e il carattere dell'olonomia e dell'anolonomia, stabiliti, valendosi delle coordinate normali (§ 21 e § 14), si mantengono inalterati col riferirsi invece a coordinate d'altra specie — vale a dire, sono indipendenti dalla scelta delle coordinate del sistema.

Per esempio, potremo sostituire agli angoli di direzione (§ 3) i coseni di direzione $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$, della stessa terna invariabilmente connessa col solido considerato, che sono collegati con essi dalle note relazioni [le (1) del § 3]. Con ciò il numero delle coordinate riuscirà aumentato di sei. D'altra parte, si aggiungono le *sei* relazioni

$$\alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2 = 1$$

$$\alpha_s \alpha_{s'} + \beta_s \beta_{s'} + \gamma_s \gamma_{s'} = 0, \qquad (s' \gtrless s)$$

o, in forma differenziale,

$$\alpha_s\, d\alpha_s + \beta_s\, d\beta_s + \gamma_s\, d\gamma_s = 0$$

$$\alpha_{s'}\, d\alpha_s + \beta_{s'}\, d\beta_s + \gamma_{s'}\, d\gamma_s + \alpha_s\, d\alpha_{s'} + \beta_s\, d\beta_{s'} + \gamma_s\, d\gamma_{s'} = 0,$$

le quali semplicemente rappresentano la rigidità del mobile. La dipendenza delle coordinate ordinarie del punto generico dalle suddette è rappresentata, col solito significato dei simboli (cfr. § 1), dalle

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1\,\mathfrak{x} + \alpha_2\,\mathfrak{y} + \alpha_3\,\mathfrak{z} \\ y &= \beta + \beta_1\,\mathfrak{x} + \beta_2\,\mathfrak{y} + \beta_3\,\mathfrak{z} \\ z &= \gamma + \gamma_1\,\mathfrak{x} + \gamma_2\,\mathfrak{y} + \gamma_3\,\mathfrak{z}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Altro esempio. Supponiamo che $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_{\nu'}$ siano una specie qualunque di coordinate di un sistema, appartenenti al suo movimento relativo ad una terna d'assi dotati di un movimento dato. Siccome, assegnato un valore al tempo, riesce fissata la reciproca posizione degli assi mobili e degli assi di riferimento, segue dalla premessa definizione che $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_{\nu'}$, si potranno anche assumere per coordinate del sistema nel suo movimento per rispetto agli assi di riferimento, atte a fornirne le posizioni, col concorso del tempo. La dipendenza delle coordinate ordinarie del punto generico è rappresentata dalle (1), dove le $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(1 = 1, 2, 3)$ si riferiscano alla terna mobile, con che traducono funzioni note di t, e le $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ s'intendano indicare le coordinate dello stesso punto rispetto a questa terna, funzioni di $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_{\nu'}$, e, se occorre, di t.

L'operatore δ.

§ 94. — Definiamo l'operatore δ con questo che, indicando con $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ una specie di coordinate, atte a individuare, col concorso, se occorre, del tempo t, la posizione del sistema considerato, al tempo t medesimo, in conseguenza di che, nel mo-

vimento di questo sistema, esse risultano altrettante funzioni regolari di t, e si verificano le relazioni

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma\, \Xi_i\, d\xi = T_i\, dt: \\ (i = 1, 2, \dots \mu)\end{array}\right\} \quad (1)$$

e indicando poi con ω una funzione regolare di t, delle $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ e delle $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots \dot{\xi}_\nu$, dove

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt},$$

concepite, quando occorre, come simboli di variabili indipendenti: si abbia

$$\delta\omega = \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\delta\xi + \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\xi}}\delta\dot{\xi}, \quad (2)$$

colla condizione che, nel corso del movimento, le $\delta\xi$, $\delta\dot{\xi}$ riescano funzioni regolari di t, e si verifichino

$$\Sigma\, \Xi_i\, \delta\xi = 0, \quad (3)$$

$$\delta\dot{\xi} = \frac{d\,\delta\xi}{dt}. \quad (4)$$

Nel caso che il sistema sia olonomo, le $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ potranno rappresentare una specie di coordinate libere. Allora le (1) mancheranno, e con esse le (3); per modo che le $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots \delta\xi_\nu$ si ridurranno ad altrettante funzioni regolari arbitrarie di t.

Supponiamo poi che un'altra specie di coordinate, atte, come le precedenti, a individuare la posizione del sistema al tempo t, col concorso, se occorre, del tempo medesimo, sia rappresentata da $\xi'_1, \xi'_2 \dots \xi'_{\nu'}$, e si verifichino le relazioni conformi a (1)

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma'\, \Xi'_{i'}\, d\xi' = T'_{i'}\, dt. \\ (i' = 1, 2, \dots \mu')\end{array}\right\} \quad (5)$$

Potremo definire un operatore avente per rapporto ad esse lo stesso significato che δ per rapporto alle precedenti; e indi-

candolo con δ', mentre ω' rappresenta una funzione di t, delle ξ' e delle $\dot{\xi}'$, dove

$$\dot{\xi}' = \frac{d\xi'}{dt},$$

sarà

$$\delta'\omega' = \Sigma' \frac{\partial \omega'}{\partial \xi'} \delta'\xi' + \Sigma' \frac{\partial \omega'}{\partial \dot{\xi}} \delta'\dot{\xi}', \tag{6}$$

colla condizione che le $\delta'\xi'$, $\delta'\dot{\xi}'$ siano funzioni regolari di t, e si verifichino

$$\Sigma' \Xi' \delta'\xi' = 0 \tag{7}$$

$$\delta'\dot{\xi}' = \frac{d\,\delta'\xi'}{dt}. \tag{8}$$

Supponiamo ora, per fissar le idee, $\nu' \gtreqqless \nu$. Sarà ciascuna delle $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_{\nu'}$ funzione delle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$ e, in generale di t, e ciascuna delle $\dot{\xi}'_1, \dot{\xi}'_2, \ldots \dot{\xi}'_\nu$ funzione delle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, delle $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots \dot{\xi}_\nu$ e della stessa t.

Quindi

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}, \tag{9}$$

introducendo la quale espressione in (5), se ne ricava

$$\Sigma\, d\xi\, \Sigma' \Xi'_{i'} \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} = \left(T'_{i'} - \Sigma' \Xi'_{i'} \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right) dt.$$

Di queste eguaglianze, previa, se ne torna il caso, un'opportuna trasformazione delle (5), μ formeranno un sistema identico a (1), e le rimanenti $\mu' - \mu = \nu' - \nu$ si ridurranno ad altrettante identità. Quindi, intendendo assegnato ai valori di i' un ordine conveniente:

$$T'_{i'} - \Sigma' \Xi'_{i'} \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \begin{cases} T_i & i' \leqq \mu \\ 0 & i' > \mu \end{cases}$$

$$\Sigma' \Xi'_{i'} \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} = \begin{cases} \Xi_i & i' \leqq \mu \\ 0 & i' > \mu. \end{cases} \tag{10}$$

D'altra parte, conformemente a (2), abbiamo

$$\delta \xi' = \Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \delta \xi, \tag{11}$$

dove le $\delta \xi$ soddisfanno (3).

Ne viene, *per ogni valore di* i', moltiplicando le (10), relative alle singole ξ, pel corrispondente $\delta \xi$ rispettivamente, poi sommando membro a membro le eguaglianze così ottenute,

$$\Sigma' \, \Xi'_{i'} \, \delta \xi' = 0.$$
$$(i' = 1, 2, \ldots \mu')$$

Cioè le $\delta \xi'$ soddisfanno (7).

Inoltre, conformemente a (2), si ha

$$\delta \dot{\xi}' = \Sigma \frac{\partial \dot{\xi}'}{\partial \xi} \delta \xi + \Sigma \frac{\partial \dot{\xi}'}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi}.$$

Confrontando la qual formola con (11), e valendosi di (9) e (4), si trova, con facile calcolo, *

$$\delta \dot{\xi}' = \frac{d \, \delta \xi'}{d t}; \tag{12}$$

per modo che $\delta \xi'$ soddisfa anche (8).

---

* Abbiamo

$$\delta \dot{\xi}' = \Sigma \frac{\partial \dot{\xi}'}{\partial \xi} \delta \xi + \Sigma \frac{\partial \dot{\xi}'}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi}. \tag{1}$$

Inoltre

$$\delta \xi' = \Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \delta \xi \tag{2}$$

$$\dot{\xi}' = \frac{d \xi'}{d t} = \frac{\partial \xi'}{d t} + \Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \dot{\xi}, \tag{3}$$

donde si ricava

$$\frac{\partial \dot{\xi}'}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \xi'}{\partial \xi}. \tag{4}$$

Siccome è lecito assumere per le $\delta'\xi'$, $\delta'\dot{\xi}'$ qualunque sistema di valori che soddisfaccia (7) e (8), potremo porre

$$\delta'\xi' = \delta\xi', \qquad \delta'\dot{\xi}' = \delta\dot{\xi}'.$$

Infine, indichiamo con ω la funzione di t, delle ξ, e delle $\dot{\xi}$ a cui si riduce ω', concependovi le ξ' e le $\dot{\xi}'$ come funzioni di queste variabili. Con questo

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \Sigma'\frac{\partial\omega'}{\partial\xi'}\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} + \Sigma'\frac{\partial\omega'}{\partial\dot{\xi}'}\frac{\partial\dot{\xi}'}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\dot{\xi}} = \Sigma'\frac{\partial\omega'}{\partial\dot{\xi}'}\frac{\partial\dot{\xi}'}{\partial\dot{\xi}}.$$

Donde si ricava immediatamente, per (2) e (6),

$$\delta\omega = \delta'\omega';$$

Infine

$$\delta\dot{\xi} = \frac{d\delta\xi}{dt}. \tag{5}$$

Da (2)

$$\frac{d\delta\xi'}{dt} = \Sigma\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi'}{d\xi}\right)\delta\xi + \Sigma\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}\frac{d\delta\xi}{dt}; \tag{6}$$

e per (4), (5) le seconde sommatorie sono eguali in (1) e (6): con che resta da dimostrare che sono eguali anche le prime.

Ora da (3) si ha

$$\frac{\partial\dot{\xi}'}{\partial\xi_r} = \frac{\partial^2\xi'}{\partial t\partial\xi_r} + \Sigma\frac{\partial^2\xi'}{\partial\xi\partial\xi_r}\dot{\xi}.$$

D'altra parte

$$\frac{d\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi_r}}{dt} = \frac{\partial^2\xi'}{\partial\xi_r\partial t} + \Sigma\frac{\partial^2\xi'}{\partial\xi_r\partial\xi}\dot{\xi}.$$

Con che i primi membri riescono eguali, e le suddette somme, *C. V. D.*

che si può anche scrivere, poichè si ha

$$\omega = \omega',$$

associando con dati valori delle ξ i corrispondenti valori delle ξ',

$$\delta'\omega = \delta\omega. \tag{13}$$

Così l'operatore δ può concepirsi come avente lo stesso significato, a qualunque specie di coordinate si riferisca.

Inteso d simbolo di differenziazione per rispetto al tempo t, hanno un significato preciso

$$d\delta\omega, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \delta\omega\, dt,$$

dove, naturalmente, $\delta\omega$ va inteso ridotta una funzione di t, col concepirvi come funzioni di t tutte le variabili da cui direttamente dipende. Porremo, per definizione,

$$\delta d\omega = d\delta\omega, \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\omega\, dt. \tag{14}$$

Ora collo stesso calcolo precedentemente adoperato per dimostrar (12), si trova, in generale, supposto ω funzione di t e delle ξ,

$$\delta \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\delta\omega}{dt}.$$

Quindi, per la prima delle due posizioni suddette,

$$\delta \frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta d\omega}{dt}. \tag{15}$$

L'operatore δ interpretato come simbolo di variazione per rispetto ad un movimento virtuale sincrono.

§ 95. — Le precedenti proprietà dell'operatore δ sono senz'altro soddisfatte, quando gli si attribuisce il significato col quale dal principio l'abbiamo adoperato, quello cioè di coeffi-

ciente differenziale rispetto al tempo in un « movimento virtuale », per cui, se x, y, z sono le coordinate del punto generico del mobile, il vettore $(\delta x, \delta y, \delta z)$ rappresenta la velocità al tempo t appartenente a questo punto nel movimento virtuale medesimo (§ 22).

Indichiamo con $\xi + \Delta \xi$ il valore della coordinata generica ξ del sistema ad un istante qualsivoglia di un movimento virtuale relativo al tempo t, il quale determina, alla sua volta, un istante qualsivoglia del movimento effettivo. Poichè la successione delle posizioni del mobile nel movimento effettivo e quella dello stesso mobile in un movimento virtuale relativo ad un istante qualunque, a parte la relazione stabilita dai vincoli, sono fra loro indipendenti, giova considerare il tempo nel movimento virtuale come una variabile indipendente da t, e indicarla con un diverso simbolo. Sia questo ϑ, e conveniamo che a $\vartheta = 0$ corrisponda la posizione che compete al mobile al tempo t, nel movimento effettivo. Allora, col primitivo significato del δ, abbiamo senz'altro

$$\delta \xi = \lim_{\vartheta = 0} \frac{\Delta \xi}{\vartheta}. \tag{1}$$

Immaginiamo ora un movimento virtuale, come il suddetto, individuato dalla successione dei valori della variabile ϑ, per ogni valore di t appartenente al considerato intervallo, e stabiliamo che, se si considerano le posizioni corrispondenti ad uno stesso valore ϑ di quella variabile nel movimento virtuale relativo ai due valori t e $t + Dt$, la seconda tenda alla prima, collo svanire di Dt. Noi creiamo in tal modo una successione di movimenti, individuati dai singoli valori di ϑ, comprendenti il movimento effettivo, che corrisponde a $\vartheta = 0$, i quali appartengono tutti allo stesso intervallo a cui appartiene questo movimento, e, mediante gli stessi valori di t, gli corrispondono in modo che, per ogni posizione del movimento effettivo, è determinata la posizione che gli corrisponde in ognuno di essi — alla posizione al tempo t in quello corrispondendo la posizione allo stesso tempo t in questi.

Con ciò $\Delta \xi$ rappresenta la variazione che riceve la ξ pel passaggio dalla posizione a cui si riferisce del movimento effettivo, ch'è una posizione qualsivoglia dello stesso movimento, alla posizione corrispondente del movimento generico della suddetta

corso, se occorre, di t, una posizione assumibile dal sistema a questo tempo, generalmente diversa da quella che appartiene al movimento effettivo, che si ritrova nell'ipotesi $\delta\eta = 0$. La successione delle posizioni individuate da $\eta_1 + \delta\eta_1$, $\eta_2 + \delta\eta_2$ ... $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$, corrispondente alla successione dei valori del tempo t, che forma il supposto intervallo, costituisce un movimento, che ha comuni i vincoli col movimento effettivo, e gli corrisponde in modo che, per ogni posizione di questo, individuata da un valore qualunque di t, riesce determinata, mediante lo stesso valore di t, la posizione che le corrisponde in quello.

La $\delta\eta$ è senz'altro una « variazione indipendente » della funzione η di t: e si ha

$$\frac{d\,\delta\eta}{dt} = \frac{\delta(\eta + d\eta) - \delta\eta}{dt} = \frac{\delta\, d\eta}{dt} = \delta\,\frac{d\eta}{dt}, \tag{1}$$

dove è tratto partito della circostanza che l'operatore δ, conformemente alla convenzione in discorso, non concerne t.

Ciò posto, se si indica con ω una funzione di t, delle η e delle $\dot\eta$, e si pone, conformemente a (2) del § 94,

$$\delta\omega = \Sigma\,\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\,\delta\eta + \Sigma\,\frac{\partial\omega}{\partial\dot\eta}\,\delta\dot\eta\,, \tag{2}$$

$\delta\omega$ riesce la « variazione prima » o semplicemente « variazione » di ω corrispondente alla suddetta di η e di $\dot\eta$, il cui significato scaturisce dalla precedente costruzione: per cui potremo chiamarla « variazione relativa ad un movimento soggetto agli stessi vincoli del movimento effettivo, sincrono del movimento medesimo »: col termine « sincrono » indicando che, come nel caso precedente, alle posizioni corrispondenti si assegna lo stesso valore del tempo.

Dalle (1) scaturisce agevolmente la relazione analoga più generale, nell'ipotesi di ω funzione di t e delle coordinate,

$$\frac{d\,\delta\omega}{dt} = \frac{\delta\, d\omega}{dt} = \delta\,\frac{d\omega}{dt}. \tag{3}$$

Posto poi, col precedente significato più generale di ω,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\omega\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta\omega\, dt,$$

risulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \omega \, dt$$

la « variazione prima » o « variazione » dell'integrale corrispondente alle variazioni $\delta \eta$, $\delta \dot{\eta}$, delle η, $\dot{\eta}$, che, per quanto precede, si può chiamare la variazione dello stesso integrale relativa ad un movimento soggetto agli stessi vincoli dell'effettivo, o, indifferentemente, di un movimento virtuale, sincrono del movimento medesimo.

Supponiamo che $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$, funzioni di t e delle $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$, rappresentino in particolare altrettante coordinate del sistema considerato, non più libere quando sia $\nu > \lambda$, ma soggette a $\nu - \lambda$ relazioni suscettibili della forma finita

$$E_i(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu, t) = 0,$$

o della forma differenziale

$$\Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi} d\xi = - \frac{\partial E_i}{\partial t} dt.$$

Lo stesso $\delta \omega$ definito da (1) sarà anche rappresentato, per (11) del § 94, da

$$\delta \omega = \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \delta \xi,$$

e le $\delta \xi$ soddisfaranno

$$\Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi} \delta \xi = 0,$$

che, coll'introduzione delle η e delle $\delta \eta$, si riducono ad altrettante identità: mentre, per (3), si avrà

$$\delta \dot{\xi} = \frac{d \delta \xi}{dt}.$$

Così, se intendiamo fatta la precedente costruzione di un movimento corrispondente al movimento effettivo, soggetto agli stessi vincoli, mediante le coordinate ξ, invece che mediante le η, troviamo fra le $\delta\xi$ quelle relazioni che, a suo luogo, abbiamo assunto come caratteristiche delle variazioni relative ad un movimento virtuale sincrono dell'effettivo.

§ 97. — Per esaminare ora la relazione fra il movimento virtuale e il movimento soggetto agli stessi vincoli, riprendiamo il caso generale, e, per fissar le idee, intendiamo δ rappresentato da (1′) del § 95*. Si dovrà attribuire a questo operatore il significato di una variazione per rispetto ad un movimento sincrono dell'effettivo, e soggetto agli stessi vincoli, quando i vincoli del movimento effettivo essendo tradotti dalle (1) del § 94, si abbia

$$\delta\left(\Sigma\, \Xi_i\, d\xi - T_i\, dt\right) = 0.$$
$$(i = 1, 2, \dots \mu)$$

Coinciderà dunque movimento sincrono virtuale con movimento sincrono soggetto agli stessi vincoli dell'effettivo, quando queste relazioni riescano equivalenti alle (3) del § 94, o, per agevolare il confronto, alle

$$d\,\Sigma\, \Xi_i\, d\xi = 0,$$
$$(i = 1, 2, \dots \mu)$$

che, dovendosi le stesse (3) del § 94 verificare per qualunque valore di t, si possono ad esse surrogare.

Quella coincidenza si verifica ogniqualvolta il sistema è olonomo. Come si può riconoscere, sia deducendolo dalla precedente conclusione relativa agli stessi sistemi: sia notando che, se

$$\left.\begin{array}{c} E_i(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu, t) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots \mu) \end{array}\right\} \quad (1)$$

* La qualità di movimento sincrono si può tradurre o colla circostanza che δ non si applichi a t e dt, o colla condizione che sia $\delta t = \delta dt = 0$.

è la forma finita delle condizioni traducenti i vincoli, le condizioni

$$\Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi} \delta \xi = 0,$$

caratteristiche del movimento virtuale, non sono altro che

$$\delta E_i (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu, t) = 0,$$

per modo che questo movimento riesce conforme alle stesse (1): sia infine applicando il precedente criterio generale, in base all'identità

$$\delta \Sigma \left(\frac{\partial E_i}{\partial \xi} \frac{d \xi}{d t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} \right) = \frac{d}{d t} \Sigma \frac{\partial E_i}{\partial \xi} \delta \xi.$$

La stessa circostanza che il sistema sia olonomo è poi anche necessaria. Al qual proposito, ci limiteremo a considerare il seguente caso semplicissimo, che può servir di modello del ragionamento generale.

Si riduca il sistema ad un punto, vincolato a possedere, in ogni sua posizione, velocità parallela ad un certo piano, variabile regolarmente colla posizione medesima.

Indicando con x, y, z le coordinate del punto mobile, e con φ, χ, ψ tre funzioni regolari di queste, proporzionali ai coseni di direzione della normale al suddetto piano variabile, i vincoli del movimento effettivo si traducono nell'equazione

$$\varphi \, d x + \chi \, d y + \psi \, d z = 0. \tag{2}$$

Donde segue che un movimento virtuale del punto sarà caratterizzato da

$$\varphi \, \delta x + \chi \, \delta y + \psi \, \delta z = 0. \tag{3}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè questo movimento e il movimento soddisfacente agli stessi vincoli dell'effettivo coin-

cidano è che, subordinatamente a (2) e (3), si verifichi l'eguaglianza

$$\delta(\varphi\, dx + \chi\, dy + \psi\, dz)$$
$$= d(\varphi\, \delta x + \chi\, \delta y + \psi\, \delta z),$$

ossia, eseguendo i calcoli, e riducendo,

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) A + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) B + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) C = 0,$$

dove A, B, C rappresentano i determinanti maggiori contenuti nella matrice

$$\left| \begin{matrix} dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{matrix} \right|.$$

La quale condizione, escluso

$$A = B = C = 0,$$

ossia

$$\delta x : \delta y : \delta z = dx : dy : dz,$$

nel qual caso il movimento virtuale si sovrappone all'effettivo, si riduce, alla sua volta, per (2) e (3), a

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \varphi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \chi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \psi = 0,$$

nota condizione d'integrabilità dell'equazione ai differenziali totali

$$\varphi\, dx + \chi\, dy + \psi\, dz = 0.$$

Per modo che l'anzidetta condizione necessaria e sufficiente risulta quella che il vincolo sia anche rappresentabile con una equazione finita

$$E(x, y, z) = 0,$$

esprimente che il supposto vincolo è soddisfatto in quanto il punto si mantiene sopra una superficie data, e cioè che il sistema sia olonomo *.

L'operatore δ^*.

§ 98. — Indichiamo, come abbiamo fatto fin ora, con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$ una certa specie di coordinate: con ω una funzione regolare delle ξ, delle $\dot{\xi}$ e del tempo t: con δ, applicato ai simboli già adoperati, l'operatore precedentemente definito: con δt una funzione regolare disponibile di t: e poniamo finalmente

$$\delta dt = d\delta t. \tag{1}$$

Definiremo l'operatore δ^* colle formole:

$$\delta^* \frac{d\xi}{dt} = \frac{\delta d\xi\, dt - d\xi\, \delta dt}{dt^2} = \delta\dot{\xi} - \dot{\xi}\frac{d\delta t}{dt}, \tag{2}$$

$$\delta^*\omega = \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\delta\xi + \Sigma \frac{\partial\omega}{\partial\dot{\xi}}\delta^*\dot{\xi}$$

$$= \delta\omega - \frac{d\delta t}{dt}\Sigma\frac{\partial\omega}{\partial\dot{\xi}}\dot{\xi}, \tag{3}$$

$$\delta^*(\omega\, dt) = \delta^*\omega\, dt + \omega\,\delta dt = \left(\delta^*\omega + \omega\frac{d\delta t}{dt}\right)dt, \tag{4}$$

$$\delta^*\int_{t_1}^{t_2}\omega\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta^*(\omega\, dt). \tag{5}$$

Concepita, come al § 94, un'altra specie di coordinate dello stesso sistema mobile, $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi_\nu'$, e indicato con δ'^* il rela-

---

* Cfr. *Hölder: Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* — (Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 1896).

tivo operatore analogo a δ^*, condizione necessaria e sufficiente perchè sia, col significato della (13) di § 94,

$$\delta'^* \omega = \delta^* \omega \tag{6}$$

riesce, per (3), prescindendo dal caso che δt si riduca ad una costante, e tenendo conto della suddetta eguaglianza,

$$\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi} = \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\xi}'} \dot{\xi}' :$$

la quale si verificherà quando ω riesca funzione omogenea di egual grado delle $\dot{\xi}$ e delle $\dot{\xi}'$, ossia quando, essendo funzione omogenea di un certo grado delle $\dot{\xi}$, le $\dot{\xi}'$ siano funzioni omogenee lineari delle stesse $\dot{\xi}$. Ciò che si verificherà, alla sua volta, quando le ξ' saranno funzioni puramente delle ξ, senza intervento del tempo t esplicito. Così, quando, essendo le ξ atte a individuare la posizione, senza concorso del tempo esplicito — come le coordinate normali — tali siano anche le ξ'.

Nella stessa ipotesi che la ω sia funzione omogenea delle $\dot{\xi}$, indicandone con α il grado, la (3) diventa

$$\delta^* \omega = \delta \omega - \alpha \omega \frac{d \delta t}{dt}. \tag{7}$$

E questa relazione, per quanto abbiamo ora conchiuso, si riferisce indifferentemente a due diverse specie di coordinate del sistema, atte ambedue a individuarne la posizione, senza concorso del tempo esplicito.

Rileviamo che alle indicate condizioni soddisfa $\omega = \dot{\xi}$, nel qual caso $\alpha = 1$.

L'operatore δ^* interpretato come simbolo di variazione per rispetto ad un movimento virtuale asincrono.

§ 99. — Insieme col movimento effettivo di un sistema, definito dalla successione dei valori del tempo t, in un intervallo (t_0, t_1), e dalla corrispondente successione dei valori delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, consideriamo un movimento virtuale sincrono, dedottone al modo indicato nel § 95, per modo che ogni posizione di esso corrisponda, mediante lo stesso valore del tempo,

ad una posizione del movimento effettivo. Mutiamo questo movimento virtuale semplicemente con ciò che riferiamo la successione delle posizioni che vi appartengono ad una successione di valori del tempo diversa dalla precedente, tendente alla primitiva, cioè alla successione competente al movimento effettivo, col tendere delle singole posizioni appartenenti al movimento virtuale alle corrispondenti del movimento effettivo. Vuol dire che la posizione del movimento virtuale individuata dal valore t del tempo, o, in altre parole, corrispondente alla posizione al tempo t del movimento effettivo, si riferirà ora ad un valore del tempo diverso da t, che indicheremo con $t + \Delta t$, dove Δt svanisce col tendere della prima posizione alla seconda, e rappresenta in generale una funzione regolare di t. Chiameremo il movimento così definito un «movimento virtuale asincrono, coordinato al movimento effettivo».

Ciò posto, se indichiamo con $\Delta^* \dot{\xi}$ la variazione che riceve $\dot{\xi}$ pel passaggio dalla posizione a t del movimento effettivo alla corrispondente posizione di un movimento asincrono, tenendo calcolo del valore del tempo spettante a quest'ultima, si ha

$$\Delta^* \dot{\xi} = \frac{d(\xi + \Delta \xi)}{d(t + \Delta t)} - \frac{d\xi}{dt}.$$

Ora,

$$\frac{d(\xi + \Delta \xi)}{d(t + \Delta \xi)} = \frac{\dot{\xi} + \Delta \dot{\xi}}{1 + \dfrac{d \Delta t}{dt}} = \dot{\xi} + \delta \dot{\xi} - \dot{\xi} \frac{d \delta t}{dt} + \varepsilon,$$

dove, essendo δ simbolo di variazione *prima* corrispondente alla variazione totale indicata da Δ, e inteso che $\dfrac{d\delta}{dt}$ sia dello stesso ordine di δ, è ε di ordine superiore ai termini scritti. Ne viene che $\delta^* \dot{\xi}$, definito da (2) del § 98, ha con $\Delta^* \dot{\xi}$ relazione analoga a quella di $\delta \dot{\xi}$ con $\Delta \dot{\xi}$, per cui si può interpretare come una specie di variazione: e, con questo significato, la chiameremo una « variazione relativa ad un movimento virtuale asincrono », o, più semplicemente, « variazione virtuale relativa ad un movimento asincrono ».

Limitiamoci, in vista delle applicazioni, a supporre ω funzione delle ξ e delle $\dot{\xi}$, e di quest'ultime, sia funzione omogenea. Starà la relazione (7) del § 98, la quale può concepirsi come puramente subordinata ad una variazione di posizione e di tempo. Quindi la stessa interpretazione varrà per tutte le formole con cui abbiamo precedentemente definito l'operatore δ^*: e, per conseguenza, applicheremo il suddetto termine di « variazione virtuale relativa ad un movimento asincrono » a tutte le formole medesime.

Osserviamo, a questo proposito, come, nel caso generale, in cui giova stabilire il concetto del movimento virtuale sincrono dell'effettivo coll'ajuto di un parametro ϑ, individuante i singoli movimenti virtuali di una successione continua, potremo concepire Δt come funzione regolare di questo parametro ϑ, e porre, conformemente a (1') del § 95,

$$\delta t = \lim_{\vartheta = o} \frac{\Delta t}{\vartheta} \delta \vartheta.$$

Nel caso poi che il sistema sia olonomo, valendoci del principio esposto al § 96, potremo concepire Δt come un incremento disponibile di t, salvo la condizione che sia funzione regolare della stessa t, e porre senz'altro $\Delta t = \delta t$.

Molteplici significati dell'equazione di d'Alembert e Lagrange.

§ 100. — L'equazione di d'Alembert e Lagrange per un sistema di corpi rigidi (cfr. § 28), fu stabilita col concetto che δ rappresenti il coefficiente differenziale rispetto al tempo in un movimento virtuale, relativo al tempo t (§ 22). Però essa, ed ogni conseguenza, che ne abbiamo dedotto, sta formalmente con qualunque interpretazione dell'operatore medesimo, purchè serbi le proprietà formali con cui l'abbiamo definito nel § 94; sempre ne scaturiscono, come fu veduto, le equazioni pure del movimento del sistema, le quali, non serbando traccia di δ, sono indipendenti da quell'interpretazione. Se non che, a seconda del significato che si attribuisce a δ, l'equazione medesima si presta ad un diverso enunciato, che costituisce un particolare teorema, e le equazioni pure del movimento riescono dedotte con un particolare concetto.

Gli operatori δ e δ^* applicati alla trasformazione dell'equazione di d'Alembert e Lagrange.

§ 101. — Assumiamo l'equazione di d'Alembert e Lagrange sotto la forma (3) del § 28

$$\Sigma \int_\tau k \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) d\tau - \Pi = 0 \qquad (1)$$

$$\Pi = \Sigma \left[\int_\tau k (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) d\tau + \int_\sigma (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) d\tau \right]. \qquad (2)$$

Poniamo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Abbiamo, inteso che δx, δy, δz siano funzioni regolari di t in un intorno del valore considerato,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = \frac{d\dot{x}}{dt} \delta x = \frac{d \dot{x} \delta x}{dt} - \dot{x} \frac{d \delta x}{dt}.$$

$$\dot{x} \frac{d \delta x}{dt} = \dot{x} \delta \dot{x} = \frac{1}{2} \delta \dot{x}^2,$$

e le identità analoghe.

Quindi, indicando con v la grandezza della velocità del punto generico al tempo t,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z = \frac{d(\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z)}{dt} - \frac{1}{2} \delta \mathrm{v}^2.$$

Donde, con T indicando la grandezza della forza viva del sistema allo stesso tempo t, e rilevando che l'operatore δ, *per la*

sua definizione, è manifestamente commutabile con $\Sigma \int_\tau k \ldots d\tau$, si ricava

$$\Sigma \int_\tau k\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\,\Sigma \int_\tau k\left(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z\right) d\tau - \delta T.$$

Con questo, l'equazione (1) può porsi sotto la forma

$$\delta T + \Pi = \frac{d}{dt}\,\Sigma \int_\tau k\left(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z\right) dt. \tag{3}$$

Rappresentiamo, come precedentemente, con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$ una specie di coordinate, atte a determinare, col concorso, se occorre, del tempo t, la posizione del sistema. Vuol dire che le x, y, z saranno funzioni delle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, e, ogniqualvolta la posizione sia da queste individuata col concorso del tempo, anche esplicitamente di t. Quindi, distinguendo, fin che occorre, con Σ_ξ la somma relativa agl'indici delle ξ (cfr. § 93),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \Sigma_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}, & \delta x &= \Sigma_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\delta\xi \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + \Sigma_\xi \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}, & \delta y &= \Sigma_\xi \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\delta\xi \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} + \Sigma_\xi \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}, & \delta z &= \Sigma_\xi \frac{\partial z}{\partial \xi}\,\delta\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ne viene

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{5}$$

rappresentando con T_0, T_1, T_2 una funzione omogenea delle $\dot{\xi}$, rispettivamente di grado nullo, 1° e 2°, i cui coefficienti sono funzioni delle ξ e di t.

Questa funzione si riduce a T_2 quando le x, y, z risultano funzioni delle sole ξ. Tale è il caso che le ξ rappresentino le coordinate normali, o una specie di coordinate libere di un sistema olonomo soggetto a vincoli indipendenti dal tempo. Allora torna opportuno di richiamare che, per (7) del § 98, si avrà

$$\delta T = \delta^* T + 2 T \frac{d \delta t}{d t}:$$

con che a (1) si può dare la forma

$$\delta^* T + \Pi + 2 T \frac{d \delta t}{d t} = \frac{d}{d t} \Sigma \int_\tau k \left(\dot{x} \, \delta x + \dot{y} \, \delta y + \dot{z} \, \delta z \right) d \tau. \quad (6)$$

Poniamo poi

$$P = \Sigma (\mathrm{X} \, l + \mathrm{Y} \, m + \mathrm{Z} \, n + \mathrm{L} \, p + \mathrm{M} \, q + \mathrm{N} \, r)$$

$$= \Sigma \left[\int_\tau k \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) d \tau + \int_\sigma \left(X_n \frac{dx}{dt} + Y_n \frac{dy}{dt} + Z_n \frac{dz}{dt} \right) d \sigma \right] \quad (7)$$

per modo che P rappresenti la misura della potenza delle forze impresse corrispondente all'atto di movimento effettivo al tempo t (cfr. § 11).

Posto

$$\left. \begin{aligned} P^{(o)} &= \Sigma \left[\int_\tau k \left(X \frac{\partial x}{\partial t} + Y \frac{\partial y}{\partial t} + Z \frac{\partial z}{\partial t} \right) d \tau + \int_\sigma \left(X_n \frac{\partial x}{\partial t} + Y_n \frac{\partial y}{\partial t} + Z_n \frac{\partial z}{\partial t} \right) d \sigma \right] \\ P^{(\xi)} &= \Sigma \left[\int_\tau k \left(X \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) d \tau + \int_\sigma \left(X_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y_n \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z_n \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) d \sigma \right], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

con che $P^{(o)}, P^{(\xi_1)} \ldots P^{(\xi_\nu)}$ rappresenteranno, in generale, altrettante funzioni di ξ, $\frac{d \xi}{d t}$ e t, avremo

$$P = P^{(o)} + \Sigma_\xi \, P^{(\xi)} \frac{d \xi}{d t}. \quad (9)$$

E collo stesso significato dei simboli, per (2) e (4),

$$\Pi = \Sigma_\xi P^{(\xi)} \delta \xi. \tag{10}$$

Infine, posto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = p^{(\xi)}, \tag{11}$$

si ha, per (4),

$$\Sigma \int_\tau k(\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z)\, d\tau = \Sigma_\xi p^{(\xi)} \delta \xi, \tag{12}$$

come subito si riconosce, valendosi dell'osservazione che, per le stesse (4),

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

Rileviamo, a questo punto, che si ottiene una forma dell'equazione di d'Alembert e Lagrange perfettamente equivalente alla primitiva, sostituendo al primo membro, dove δx, δy, δz s'intendono funzioni regolari di t, il suo integrale rispetto al tempo t fra t' e t'', così indicando *due valori arbitrarii* di t nel supposto intervallo, per modo da potersi supporre, se giova, prossimi finchè si vuole l'uno all'altro.

Ne viene, per (3) e (12), la nuova forma

$$\int_{t'}^{t''} (\delta T + \Pi)\, dt = \Big|_{t'}^{t''} \Sigma_\xi p^{(\xi)} \delta \xi : \tag{13}$$

che, se si suppone $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, cioè $\delta \xi = 0$, per $t = t'$ e $t = t''$, si riduce a

$$\int_{t}^{t''} (\delta T + \Pi)\, dt = 0 : \tag{13'}$$

e, per (6), in quest'ultima ipotesi (la sola che occorre considerare per le applicazioni),

$$\int_{t'}^{t''}\left(\delta^* T + \Pi + 2T\frac{d\,\delta t}{dt}\right)dt = 0. \quad * \qquad (14)$$

Caso che le forze impresse ammettano funzione delle forze. — Supponiamo che, rappresentando con W una certa funzione delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, e generalmente del tempo t, si abbia

$$P^{(\xi)} = \frac{\partial W}{\partial \xi}. \qquad (15)$$

La qual proprietà è indipendente dalla scelta delle coordinate: poichè, indicando, come altre volte, con $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_{\nu'}$ una specie di coordinate diversa dalle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, e concependo queste come funzioni di quelle, senza esclusione del tempo (cfr. § 93), si ha, per (8),

$$P^{(\xi')} = \Sigma_\xi \, P^{(\xi)} \frac{\partial \xi}{\partial \xi'},$$

donde, in virtù di (15), inteso in W, mediante le ξ, introdotte le ξ',

$$P^{(\xi')} = \frac{\partial W}{\partial \xi'}.$$

Sarà allora

$$\Pi = \delta W. \qquad (16)$$

---

* Questa formola rientra in altra di significato più generale stabilita da Hölder nel suo interessante studio, citato al § 95. V. in proposito anche *Voss: Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis*, nelle stesse « Nachrichten » (1900).

E con ciò (13), (13′) si potranno porre sotto la forma

$$\delta \int_{t'}^{t''} (T + W)\, dt = \Big|_{t'}^{t''} \Sigma_\xi\, p^{(\xi)}\, \delta \xi \tag{17}$$

$$\delta \int_{t'}^{t''} (T + W)\, dt = 0. \tag{17'}$$

Una specie di forze impresse per cui si verifichi la circostanza in discorso, espressa dalla relazione (15) — la quale riesce una proprietà intrinseca delle forze medesime — si dice ammettere « funzione delle forze »: così denominando la funzione W. Bensì, col sostituire una specie di coordinate ad un'altra, potrà accadere che s'introduca in W, o se ne elimini, il tempo esplicito. Quando W dipende puramente dalla posizione del mobile, per modo che, valendosi di coordinate atte a individuare questa posizione senza concorso del tempo, W riesca funzione puramente di queste coordinate, e non del tempo esplicito, la considerata specie di forze impresse si dice ammettere funzione delle forze « indipendente dal tempo ».

È ben inteso che le forze impresse, a cui si riferiscono queste definizioni, potranno formare, eventualmente, soltanto una parte del sistema totale, che appartiene al considerato movimento.

Relazione fra la funzione delle forze e il potenziale. — Supponiamo che una certa specie di forze impresse ammetta funzione delle forze indipendente dal tempo. Rappresentando con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$ una specie di coordinate del mobile atte a individuarne la posizione senza concorso del tempo, avremo, per (7), (8) e (15),

$$P = \Sigma_\xi\, P^{(\xi)} \frac{d\xi}{dt} = \Sigma \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dW}{dt}\,; \tag{18}$$

con che le stesse forze impresse ammetteranno potenziale (§ 34), e questo sarà la stessa funzione W.

Viceversa, supponiamo che una specie di forze impresse, intese indipendenti dall'atto di movimento, ammetta potenziale: vale a dire, supponiamo che si verifichi (18), dove ora W rappresenta il potenziale, qualunque sia il relativo atto di movimento, e quindi indipendentemente da ogni relazione, che, in virtù di vincoli, possa concepirsi fra le ξ; però da queste siano

intese indipendenti le $P^{(\xi)}$, mentre W è supposto funzione delle sole ξ (cfr. § 34). Da (18), con questo, scaturisce (15); per cui le forze in discorso ammetteranno funzione delle forze, e questa sarà la stessa W, che, per un momento, rappresentava il supposto potenziale *.

Per questa parentela tra la funzione delle forze e il potenziale, designiamo la prima col simbolo precedentemente adoperato pel secondo. Avvertiamo poi che da alcuni è assunto senz'altro il termine potenziale col significato di funzione delle forze.

Teorema di Hamilton e dell'azione stazionaria.

§ 102. — Il « teorema di Hamilton » consiste formalmente nelle equazioni (13), (13') **, e, verificandosi la relativa ipotesi, nelle equazioni (17), (17'). Il suo specifico significato si collega però colla convenzione che δ si concepisca come segno di variazione relativa ad un movimento virtuale sincrono dell'effettivo (§§ 95, 96), principalmente nella suddetta ipotesi: con che esprime una proprietà caratteristica di questa variazione, applicata all'integrale

$$\int_{t'}^{t''} (T + W)\, dt,$$

il quale si chiama, quando piace designarlo con termine speciale, una misura dell'« azione » delle forze impresse, nell'intervallo di tempo considerato (t', t'').

La qual proprietà, se si adotta la forma (17'), è che la variazione dell'azione, relativa ad un movimento virtuale sincrono dell'effettivo, avente comuni con questo le posizioni estreme, è nulla: e, se si adotta la forma (17), che detta variazione è una certa funzione lineare omogenea delle variazioni corrispondenti delle coordinate delle posizioni estreme.

La prima proposizione si chiama anche « teorema dell'azione

* Questo ragionamento è implicito nella formazione, che abbiamo esposto a suo luogo (§§ 43, 44), delle equazioni pure dell'equilibrio, supposto che le forze impresse ammettano potenziale.

** Queste e le seguenti formole, citate nel presente paragrafo, appartengono tutte al precedente.

stazionaria », del qual termine è manifesto il significato. Essa esprime, se si vuole, che, se si confronta il valore dell'azione nel movimento effettivo col suo valore per un qualsivoglia movimento virtuale sincrono di esso, avente comune con esso le posizioni estreme, quel valore soddisfa alla condizione principale di un « estremo » (massimo o minimo).

Torneremo, fra un momento, sul termine « azione », e sul relativo concetto.

Teorema della minima azione.

§ 103. — Siano i vincoli del sistema indipendenti dal tempo, e le forze impresse ammettano funzione delle forze pure indipendente dal tempo: colle quali condizioni il movimento soddisfarà il teorema della conservazione dell'energia, cioè verificherà l'equazione

$$T - W = C, \tag{1}$$

dove C rappresenta una costante (§ 34).

Indichiamo con $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ una specie qualsivoglia di coordinate atta a individuare la posizione del mobile senza concorso del tempo. Sarà W funzione di queste sole variabili, e T funzione di esse e delle $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots \dot{\xi}_\nu$, quadratica, omogenea, per rispetto a queste ultime. Quindi (cfr. § 98)

$$\delta^* W = \delta W, \qquad \delta^* T = \delta T - 2 \frac{d \delta t}{dt} T$$

$$\delta^* (T - W) = \delta^* T - \delta W;$$

e in queste formole δ^* avrà un significato indipendente dalla scelta delle coordinate in discorso.

Ciò posto, consideriamo un movimento virtuale coordinato all'effettivo, al quale sia imposta la condizione di soddisfare parimente il teorema della conservazione dell'energia, conformemente a (1). Per questa condizione, non è più lecito stabilire ad arbitrio una corrispondenza fra le posizioni ad esso appartenenti ed il tempo, per modo che dovremo reputarlo, in generale, asincrono per rispetto all'effettivo. Attribuiamo, confor-

memente a ciò, a δ^* il significato di una variazione relativa a questo movimento. La condizione in discorso si tradurrà nell'equazione

$$\delta^*(T - W) = \delta^* C,$$

ossia

$$\delta^* T - \delta W = \delta^* C, \tag{2}$$

dove, naturalmente, $\delta^* C$ significa la variazione di valore corrispondente all'applicazione dell'operatore δ^* alla *funzione* $T - W$, pel considerato valore delle variabili, alla quale è imposto di riuscire costante, come C, rispetto al tempo t.

Aggiungiamo la condizione che, per $t = t'$, sia

$$\delta^* T = 0,$$

e per $t = t'$, $t = t''$,

$$\delta \xi = 0, \tag{3}$$

donde segue, egualmente per $t = t'$, $t = t''$,

$$\delta W = 0.$$

Ne viene, applicando (2) all'istante $t = t'$,

$$\delta^* C = 0,$$

ossia, nell'intero intervallo (t', t''),

$$\delta^* T = \delta W = 0. \tag{4}$$

In virtù di (3) e di (4) — la quale avvertiamo come sia subordinata a (1) — la (14) del § 101 si riduce, per (4) del § 98, a

$$\int_{t'}^{t''} \delta^* (T\,dt) = 0,$$

e per (5) del § 98, a

$$\delta^* \int_{t'}^{t''} T\,dt = 0.$$

Questo è, nella forma attuale, il « teorema di Maupertuis », o « teorema della minima azione »: il quale, chiamando ora

« azione delle forze impresse » la quantità misurata dall'integrale

$$\int_{t'}^{t''} T\,dt, \quad * \tag{5}$$

si presta all'enunciato: supposti i vincoli di un sistema mobile indipendenti dal tempo, e le forze impresse dotate di funzione delle forze indipendente dal tempo, per modo che il movimento del sistema verifichi il teorema della conservazione dell'energia, la variazione dell'azione delle forze impresse relativa ad un movimento virtuale coordinato all'effettivo, il quale verifichi, colla stessa funzione delle forze, il teorema della conservazione dell'energia, ed abbia comuni col movimento effettivo le posizioni estreme del sistema mobile, e la sua forza viva in una di esse (con che l'avrà comune anche nell'altra), è nulla — o, in altre parole, se si confronta il valore dell'azione delle forze impresse nel movimento effettivo con quello che le compete in ogni movimento virtuale coordinato ad esso, soggetto alle indicate condizioni, quel primo valore soddisfa la condizione principale di un estremo (massimo o minimo).

Osserviamo che (5) rappresenta la « forza viva totale » competente al considerato intervallo. Per cui la proposizione in discorso si può enunciare, se si vuole, per questa quantità.

Trasformazione e applicazione del teorema della minima azione.

§ 104. — Sia un unico punto mobile (x, y, z) di massa m, per modo che i vincoli, supposti indipendenti del tempo, si traducano in un'equazione della forma

$$\varphi\,dx + \chi\,dy + \psi\,dz = 0, \tag{1}$$

dove φ, χ, ψ sono funzioni di x, y, z **.

* Il termine « azione » in questi enunciati avendo una ragione puramente storica, lo applichiamo qui ad una quantità differente dalla precedente così nominata. L' « azione », secondo Maupertuis, corrisponde propriamente al doppio di questa: ma chiaramente non conta, nella presente questione, un fattore di proporzionalità (cfr. § 105).

** Prescindiamo dall'ipotesi di due equazioni come (1), con che riesce fissata la trajettoria col darne un punto. Pel significato di (1) cfr. la fine del § 97.

Quindi, stando la (9), e non essendo le $\bar{\delta}\frac{d^2x}{ds^2}, \bar{\delta}\frac{d^2y}{ds^2}, \bar{\delta}\frac{d^2z}{ds^2}$ assoggettate ad altre condizioni non comuni a δx, δy, δz, la (7) può scriversi

$$\frac{d^2x}{ds^2}\bar{\delta}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\bar{\delta}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2z}{ds^2}\bar{\delta}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

in virtù della quale si ha

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\bar{\delta}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}+\bar{\delta}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}+\bar{\delta}\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

$$-\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]=\left(\bar{\delta}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\bar{\delta}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\bar{\delta}\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\geqq 0;$$

e infatti l'equazione stessa può porsi sotto la forma

$$\bar{\delta}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]=0,$$

ch'è la condizione principale di minimo del trinomio, esprimente il quadrato della curvatura della trajettoria del considerato movimento nel punto (x, y, z).

A questa equazione va aggiunta la (9), la quale rappresenta una variazione $\bar{\delta}$ della (8), ossia, in ultima analisi, della (1), colle condizioni relative al considerato punto:

$$\bar{\delta}x=0,\quad \bar{\delta}y=0,\quad \bar{\delta}z=0,\quad \bar{\delta}\frac{dx}{ds}=0,\quad \bar{\delta}\frac{dy}{ds}=0,\quad \bar{\delta}\frac{dz}{ds}=0.$$

Se ne conclude che alla trajettoria del movimento per inerzia, subordinato a vincoli indipendenti dal tempo quali si vogliano, di un punto materiale, compete la proprietà che, confrontandola con tutte le linee che soddisfanno agli stessi vincoli, ed hanno comune con essa un punto qualunque e la tangente in esso, la sua curvatura in questo punto riesce minima.

Una linea così fatta si chiama (fra quelle che soddisfanno

ai vincoli ad essa prescritti), con termine di Hertz *, una « direttissima ».

Quindi la trajettoria del suddetto movimento è, in ogni caso, una direttissima del sistema di linee che soddisfanno ai vincoli imposti: ed è dal punto percorsa di moto uniforme.

Questi risultati si possono trasportare al caso del movimento di un sistema qualunque, mediante le definizioni seguenti.

Assegniamo una lunghezza alla « trajettoria di un sistema », così chiamando ogni successione di posizioni di un sistema, conforme a' suoi vincoli, coordinata ai valori di un parametro continuo, definendo la grandezza dS dell'elemento di essa — corrispondente all'elemento $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ del punto generico del sistema — con

$$M dS^2 = \int_\tau k\, ds^2\, d\tau = \int_\tau k\, (dx^2 + dy^2 + dz^2)\, d\tau$$
$$= \Sigma_{ij} \Xi_{ij}\, d\xi_i\, d\xi_j \qquad (\Xi_{ij} = \Xi_{ji})\,;$$

dove

$$M = \int_\tau k\, d\tau$$

e assegniamo a questo elemento una direzione, che intendiamo restar invariata quando elementi corrispondenti sono paralleli e proporzionali.

Assegniamo un angolo ϑ a due elementi di trajettoria uscentì da una posizione del sistema, corrispondenti agli elementi (dx, dy, dz) e $(\partial x, \partial y, \partial z)$ uscenti dal punto generico (x, y, z) di quella posizione, con

$$M dS\, \partial S \cos\vartheta = \int_\tau k(dx\, \partial x + dy\, \partial y + dz\, \partial z)\, d\tau = \Sigma_{ij} \Xi_{ij}\, d\xi_i\, \partial\xi_j:$$

la quale espressione di $\cos\vartheta$, valendosi della circostanza che è positiva la forma precedente, si riconosce aver valori compresi fra -1 e $+1$. Che se il secondo elemento esce da posizione diversa, l'angolo sia quello che compete all'elemento egualmente diretto uscente dalla prima.

Assegniamo una curvatura $\frac{1}{\rho}$ ad ogni posizione o posto di

* « Geradeste Bahn », « directissima ». Cfr. la nota seguente.

una trajettoria, corrispondente al posto (x, y, z) del punto generico del sistema, con

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varepsilon}{dS},$$

dove $d\varepsilon$ rappresenta l'angolo di contingenza, per cui si trova

$$\frac{M}{\rho^2} = \int_{\tau} k\left[\left(\frac{d^2 x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dS^2}\right)^2\right] d\tau.$$

Ciò stabilito, intendendo che, da questo momento in poi, s rappresenti la grandezza dell'arco di trajettoria di un sistema, stanno, per un sistema qualunque, le (2), la forma (3) del teorema della minima azione, e la conclusione che, nel movimento per inerzia, sarà $T =$ cost., cioè archi eguali di trajettoria corrisponderanno a eguali intervalli di tempo (il movimento sarà uniforme), e la trajettoria soddisfarà a (6), in conseguenza della quale riesce una direttissima — ciò che sarà in seguito dimostrato (§ 114).

A questi concetti sono informati i principii assunti da Hertz per la sua nuova esposizione della Meccanica, ch'egli fonda sul postulato: « Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam »*.

Le direttissime sono definite da (6) colle condizioni correlative

$$\Sigma\, \Xi_i\, d\xi = 0, \qquad \Sigma\, \Xi_i\, \delta\xi = 0. \qquad (10)$$

Si definiscono altresì le trajettorie « geodetiche » del sistema, chiamandosi geodetica ogni trajettoria di un sistema tale che, confrontandola con tutte le trajettorie del sistema che soddisfanno agli stessi vincoli imposti al sistema medesimo, ed hanno comuni con essa due posizioni qualunque, la lunghezza dell'arco di essa terminato a queste posizioni soddisfa la condizione principale di minimo (e riesce un minimo per posizioni abbastanza vicine).

Quindi le geodetiche sono definite da (6) con

$$\Sigma\, \Xi_i\, d\xi = 0, \qquad \delta\, \Sigma\, \Xi_i\, d\xi = 0.$$

* *Die Prinzipien der Mechanik etc.* V. la nota a pag. 18.

E si vede che, perchè le geodetiche e le direttissime coincidano, debbono coincidere le seconde di queste condizioni colle seconde delle (10), cioè il sistema dev'essere olonomo (cfr. § 97).

Cenni storici. - Significato dei precedenti teoremi.

§ 105. — Indichiamo nuovamente con s la misura dell'arco di trajettoria del punto generico del sistema mobile, terminato al suo posto al tempo t. Sarà

$$v = \frac{ds}{dt},$$

e con questo

$$\int^{t''} T\,dt = \int_{\tau} k\,d\tau \int_{s'}^{s''} v\,ds:$$

per modo che, se, per un momento, si considera un sistema composto di un certo numero di punti mobili di massa m, la stessa misura dell'azione delle forze impresse corrispondente al supposto movimento riesce rappresentata da

$$\Sigma m \int_{s'}^{s''} v\,ds. \tag{1}$$

Il concetto di misurare col prodotto della quantità di moto per lo spazio l'azione della forza impressa ad un punto materiale, corrispondente ad un suo movimento, risale alla « Dynamica » di Leibniz, che sembra averne anche osservato la proprietà di riuscire, nella variazione del movimento, un massimo o un minimo *.

Ma fu Maupertuis che, sebbene senza una propria dimostrazione, e con termini non abbastanza precisi, stabilì la proposi-

* Cfr. *Helmholtz: Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action.* (Gesammelte Abhandlungen, t. III).

zione che il movimento effettivamente prodotto dalle supposte forze, in confronto degli altri movimenti possibili, conferisce all'«azione», rappresentata da (1), il minimo valore: con che credette scoprire la legge provvidenziale che i movimenti naturali si compiono col minimo dispendio di forza.

Questa proposizione fu in seguito ripresa ed emendata da Euler: ma soltanto da Lagrange, colla scoperta del «Calcolo delle Variazioni», ricevette un assetto matematicamente rigoroso*.

Il particolar metodo d'integrazione dei problemi meccanici, di cui sarà discorso nella terza Parte ha inspirato le ricerche di Hamilton, che lo condussero a stabilire il teorema che porta il suo nome, o quello di azione stazionaria **, con un significato alquanto differente dell'azione. Il qual teorema si mantiene valido anche senza la condizione che si verifichi il teorema della conservazione dell'energia, purchè le forze impresse ammettano funzione delle forze, per avventura, dipendente dal tempo.

Sta il fatto che la proprietà affermata dai precedenti teoremi conferisce all'integrale che vi figura la qualità di un importante e caratteristico elemento del movimento dei corpi. Non occorre preoccuparsi delle relazioni fra l'integrale medesimo e il concetto dell'azione, donde trae il nome, conservato principalmente per tradizione.

Piuttosto giova osservare che a definire questo integrale bastano tempo ed energia. Per modo che i relativi teoremi appariscono estensibili ad un dominio di fenomeni naturali assai più vasto di quello del semplice movimento.

Infine, i teoremi in discorso scaturiscono da formole, che, considerate nella loro maggior generalità, rappresentano trasformazioni dell'equazione di d'Alembert e Lagrange, caratterizzate dalla circostanza che non includono alcuna particolare

---

* Cfr. *Mach: Die Mechanik in ihrer Entwickelung dargestellt*, Kap. IV. — *Helmholtz:* Mem. cit.

** Il termine «azione stazionaria» apparisce opportuno in questo caso, in cui, generalmente, non si verifica minimo. Giova però rilevare che Hamilton propone «principle of stationary action» pel principio comunemente detto della minima azione, e «principle of varying action» pel proprio, *preso nella forma relativa al caso di estremi variabili*. V. *On a general method in Dynamics etc.* Introductory remarks (London Philosophical Transactions, 1834. Parte I).

ipotesi sulla scelta delle cordinate assunte per determinare il considerato movimento: per cui costituiscono un naturale passaggio ad una forma delle equazioni pure, parimente indipendente da tale scelta: quelle che chiamiamo « equazioni pure in coordinate generali ».

Chiameremo queste formole, così concepite, « formola di Hamilton » e « formola di Maupertuis ».

Deduzione delle equazioni del movimento dalla formola di Hamilton.

§ 106. — Partiamo da

$$\int_{t'}^{t''} (\delta T + \Pi)\, dt = \begin{cases} 0 \\ \left| \Sigma_\xi \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \xi \right|_{t'}^{t''} \end{cases}$$

(cfr. § 101), e introduciamovi

$$\Pi = \Sigma_\xi P^{(\xi)} \delta \xi, \qquad \delta T = \Sigma_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \delta \xi + \Sigma_\xi \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi}.$$

Si ha

$$\int_{t'}^{t''} dt\, \Sigma_\xi \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi} = \Sigma_\xi \int_{t'}^{t''} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi}\, dt,$$

e

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \dot{\xi}\, dt = \int_{t'}^{t''} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \frac{d \delta \xi}{dt} dt = \left| \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \delta \xi \right|_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) \delta \xi\, dt. \quad (1)$$

Quindi, notando che, nell'ipotesi $\delta \xi = 0$ per $t = t'$, $t = t''$,

la parte integrata dell'ultimo membro si annulla, troviamo, così in questa ipotesi come nella contraria,

$$\int_{t'}^{t''} dt \left[\Sigma_\xi \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} - P^{(\xi)}\right)\delta\xi\right] = 0.$$

Quest'equazione, fissato t, deve stare per un intervallo (t', t'') che lo comprende, comunque piccolo. Donde si deduce, con una ben nota considerazione, che, per ogni valore di t, dev'essere

$$\Sigma_\xi \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} - P^{(\xi)}\right)\delta\xi = 0. \tag{2}$$

Concepiamo, conformemente alle equazioni di condizione

$$\Sigma_\xi \, \Xi_i \, \delta\xi = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

rappresentate le $\delta\xi$ dalle

$$\delta\xi = \Sigma_\varepsilon \, \mathrm{E}^{(\xi)} \, \varepsilon \tag{3}$$

dove le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ indicano parametri indipendenti, e le $\mathrm{E}^{(\xi)}$, in generale, funzioni delle ξ e di t (cfr. § 14).

Posto

$$\Pi = \Sigma_\varepsilon \, \varepsilon \, \Sigma_\xi P^{(\xi)} \mathrm{E}^{(\xi)} = \Sigma_\varepsilon \, P^{(\varepsilon)} \, \varepsilon,$$

per modo che

$$P^{(\varepsilon)} = \Sigma_\xi P^{(\xi)} \mathrm{E}^{(\xi)} \tag{4}$$

rappresenti il coefficiente di ε nell'espressione di Π per funzione lineare delle ε, da (2) e (3) si ricava

$$\Sigma_\xi \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\mathrm{E}^{(\xi)} - P^{(\xi)}\right]\varepsilon = 0.$$

E poichè le ε sono indipendenti, per modo che possiamo attribuire il valor zero a tutte, meno una, e a quésta il valor 1, scaturisce di qua

$$\Sigma_\xi \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \mathrm{E}^{(\xi)} = P^{(\varepsilon)}. \tag{5}$$

Tante equazioni quante sono le ε, cioè $\nu - \mu$: le quali, unitamente colle equazioni traducenti i vincoli

$$\Sigma_\xi \Xi_i \dot{\xi} = T_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu), \tag{6}$$

formano un sistema di equazioni differenziali, dove t funge da variabile indipendente, e le ξ da incognite, atto a fornir queste in funzione di t e dei debiti elementi arbitrarii, da determinarsi coi dati iniziali *.

Avvertiamo come queste equazioni possiedano la massima generalità, essendo applicabili egualmente a sistemi olonomi e anolonomi, a vincoli indipendenti e dipendenti dal tempo, e a qualunque specie di coordinate.

Deduzione delle equazioni del movimento dalla formola di Maupertuis.

§. 107. — Supposto soddisfatto il teorema della conservazione dell'energia, cioè verificata l'equazione

$$T - W - C = 0, \tag{1}$$

abbiamo (§ 103)

$$\delta^* \int_{t'}^{t''} T dt = 0, \tag{2}$$

* *Meccanica*, § 493. — G. A. *Maggi*: *Di alcune nuove forme delle equazioni della Dinamica applicabili ai sistemi anolonomi* (Rendic. della R. Accademia dei Lincei, 1902).

colle condizioni

$$t = \begin{cases} t' \\ t'' \end{cases} \qquad \delta\xi = 0, \tag{3}$$

e

$$t' \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t'' \qquad \delta^* T - \delta W = 0 \tag{4}$$

che equivale a

$$\delta^* (T - W - C) = 0, \qquad \delta^* C = 0.$$

Da (1) e (4), rappresentando con λ una funzione regolare arbitraria di t, segue

$$\delta^* \lambda (T - W - C)\, dt = 0,$$

ed anche

$$\delta^* \int_{t'}^{t''} \lambda (T - W - C)\, dt = 0. \tag{5}$$

Per cui, intese verificate (1), (2) e (4), si ha, qualunque sia λ,

$$\delta^* \int_{t'}^{t''} [T + \lambda (T - W - C)]\, dt = 0. \tag{6}$$

Reciprocamente, supponendo determinate in funzione di t le ξ e λ, in modo che riescano soddisfatte (1) e (5), sotto le condizioni (3), (4), risultandone (5), sarà da quelle ξ, sotto tali condizioni, soddisfatta anche (2).

Ora (6) (valendosi di $\delta^* \lambda = 0$) può scriversi, in primo luogo, per (1) e (4):

$$\int_{t'}^{t''} [(1 + \lambda)\, \delta^* T - \lambda\, \delta\, W]\, dt + \int_{t'}^{t''} T\, \delta dt = 0,$$

e poichè

$$\delta^* T = \delta T - 2\, T \frac{\delta\, dt}{dt},$$

anche

$$\delta \int_{t'}^{t''} \left[(1+\lambda)T - \lambda W\right] dt - \int_{t'}^{t''} (1+2\lambda) T \delta dt = 0,$$

o, valendosi della (1) del paragrafo precedente:

$$\int_{t'}^{t''} \Sigma \left\{ \frac{d}{dt} \left[(1+\lambda) \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right] - (1+\lambda) \frac{\partial T}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial W}{\partial \xi} \right\} \delta \xi \, dt$$

$$+ \int_{t'}^{t''} (1+2\lambda) \, T \delta dt = 0,$$

e l'ultimo termine può anche scriversi

$$\Big|_{t'}^{t''} (1+2\lambda) \, T \delta t - \int_{t'}^{t''} \frac{d(1+2\lambda) \, T}{dt} \delta t \, dt.$$

La soluzione

$$1 + 2\lambda = 0, \qquad \lambda = -\frac{1}{2}$$

per cui si annulla, senz'altro, la parte integrata, riduce la precedente equazione a

$$\int_{t'}^{t''} \Sigma_{\xi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \delta \xi \, dt = 0:$$

e di qua si ricavano, col noto procedimento (cfr. § 106) le equazioni

$$\Sigma_{\xi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \mathrm{E}(\xi) = 0$$

in numero eguale a quello dei gradi di libertà del sistema,

dove le $E_1(\xi)\, E_2(\xi) \ldots E_\mu(\xi)$, il cui indice al piede, in ognuna di esse, resta invariato, sono definite da

$$\delta\xi = \Sigma_\varepsilon\, E(\xi)\, \varepsilon.$$

Ora le funzioni ξ di t, determinate da queste equazioni, soddisfanno (1), per modo che, per quanto s'è premesso, sotto le prescritte condizioni, verificano (2), e le equazioni medesime sono le equazioni del movimento del sistema considerato.

Difatti si avrà

$$\dot\xi = \Sigma_\varepsilon\, E(\xi)\, e,$$

dove le $E(\xi)$ sono le stesse, a parità di indici, come le precedenti, e le e sono μ come le ε. Quindi, moltiplicando le suddette equazioni, ad una ad una, per le e corrispondenti alle relative ε, e sommando, abbiamo

$$\Sigma_\xi\, \dot\xi \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \xi}\right] = 0.$$

Ma si ha

$$\Sigma_\xi \frac{\partial W}{\partial \xi}\dot\xi = \frac{dW}{dt}$$

$$\Sigma_\xi\, \dot\xi \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\xi}\right) = \Sigma_\xi \frac{d}{dt}\left(\dot\xi \frac{\partial T}{\partial \dot\xi}\right) - \Sigma_\xi \ddot\xi \frac{\partial T}{\partial \dot\xi}$$

$$\Sigma_\xi\, \dot\xi\, \frac{\partial T}{\partial \dot\xi} = 2T, \qquad \Sigma_\xi\, \dot\xi\, \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Sigma_\xi\, \ddot\xi\, \frac{\partial T}{\partial \dot\xi} = \frac{dT}{dt}.$$

Quindi l'equazione trovata diventa

$$\frac{d(T-W)}{dt} = 0.$$

che si riduce a (1).

Applicazione alla formazione delle equazioni differenziali generali del movimento di un solido *.

§ 108. — Assumiamo per coordinate di un solido libero le coordinate ordinarie, α, β, γ, di un suo punto qualunque, e i coseni di direzione $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ ($s = 1, 2, 3$) di una terna d'assi ortogonali, invariabilmente unita con esso, coll'origine in questo punto (cfr. § 93).

Abbiamo, indicando, al solito, con x, y, z, e con $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, le coordinate del punto generico rispetto alla terna degli assi fissi, e degli assi mobili, rispettivamente,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1\,\mathfrak{x} + \alpha_2\,\mathfrak{y} + \alpha_3\,\mathfrak{z} \\ y &= \beta + \beta_1\,\mathfrak{x} + \beta_2\,\mathfrak{y} + \beta_3\,\mathfrak{z} \\ z &= \gamma + \gamma_1\,\mathfrak{x} + \gamma_2\,\mathfrak{y} + \gamma_3\,\mathfrak{z}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

relazioni che corrispondono alle

$$x = x(\xi), \qquad y = y(\xi), \qquad z = z(\xi).$$

Inoltre,

$$\left.\begin{gathered} \alpha_s\, d\alpha_s + \beta_s\, d\beta_s + \gamma_s\, d\gamma_s = 0 \\ \alpha_{s'}\, d\alpha_s + \beta_{s'}\, d\beta_s + \gamma_{s'}\, d\gamma_s + \alpha_s\, d\alpha_{s'} + \beta_s\, d\beta_{s'} + \gamma_s\, d\gamma_{s'} = 0 \\ (s, s' = 1, 2, 3) \qquad (s' \gtrless s) \end{gathered}\right\} \quad (2)$$

corrispondenti a

$$\Sigma\, \Xi_i\, d\xi = T_i\, dt. \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \qquad (3)$$

E per conseguenza,

$$\left.\begin{gathered} \alpha_s\, \delta\alpha_s + \beta_s\, \delta\beta_s + \gamma_s\, \delta\gamma_s = 0 \\ \alpha_{s'}\, \delta\alpha_s + \beta_{s'}\, \delta\beta_s + \gamma_{s'}\, \delta\gamma_s + \alpha_s\, \delta\alpha_{s'} + \beta_s\, \delta\beta_{s'} + \gamma_s\, \delta\gamma_{s'} = 0 \\ (s, s' = 1, 2, 3) \qquad (s' \gtrless s) \end{gathered}\right\} \quad (4)$$

---

* *Meccanica*, § 454.

corrispondenti a

$$\Sigma\, \Xi_i\, \delta\xi = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots \mu) \tag{5}$$

Ora, posto

$$p' = \Sigma_s\, \beta_s\, \delta\gamma_s, \qquad q' = \Sigma_s\, \gamma_s\, \delta\alpha_s, \qquad r' = \Sigma_s\, \alpha_s\, \delta\beta_s, \tag{6}$$

le (3) forniscono, col procedimento con cui nel § 1 sono dedotte le (4) dalle (3),

$$\left.\begin{array}{c}\delta\alpha_s = q'\gamma_s - r'\beta_s, \quad \delta\beta_s = r'\gamma_s - p'\alpha_s \quad \delta\gamma_s = p'\beta_s - q'\alpha_s : \\ (s = 1, 2, 3)\end{array}\right\} \tag{7}$$

con che, come, nel citato § 1, le (7) dalle (1), si deducono dalle (1)

$$\left.\begin{array}{l}\delta x = \delta\alpha + q'(z - \gamma) - r'(y - \beta) \\ \delta y = \delta\beta + r'(x - \alpha) - p'(z - \gamma) \\ \delta z = \delta\gamma + p'(y - \beta) - q'(x - \alpha),\end{array}\right\} \tag{8}$$

ossia

$$\delta x = l' + q'z - r'y, \quad \delta y = m' + r'x - p'z, \quad \delta z = n' + p'y - q'x, \tag{8'}$$

posto

$$\left.\begin{array}{l}\delta\alpha = l' + q'\gamma - r'\beta \\ \delta\beta = m' + r'\alpha - p'\gamma \\ \delta\gamma = n' + p'\beta - q'\alpha;\end{array}\right\} \tag{9}$$

e le $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ rappresentando valori indipendenti, tali dovranno intendersi i valori rappresentati da l', m', n'.

Le (7) e le (9) costituiscono insieme, pel presente caso, le relazioni

$$\delta\xi = \Sigma_\varepsilon\, E(\xi)\, \varepsilon$$

della trattazione generale. I parametri ε sono qui l', m', n', p', q', r'.

In conseguenza di queste relazioni abbiamo

$$\Pi = X l' + Y m' + Z n' + L p' + M q' + N r',$$

dove X, Y, Z e L, M, N denotano le componenti del risultante delle forze impresse, e del momento delle stesse forze rispetto all'origine come polo: le quali rappresentano i coefficienti indicati, nella trattazione generale, son $P^{(s)}$.

Così abbiamo oramai quanto occorre per formare col tipo (5) del 106 le sei equazioni del movimento, cui dovranno associarsi le (2), per formare un sistema di equazioni differenziali composte di tante equazioni quante sono le incognite.

Per mettere queste equazioni sotto la forma più conveniente, rammentiamo che, posto

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \alpha_1\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\beta} + \gamma_2\dot{\gamma} & \mathfrak{p} &= \alpha_3\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\beta}_2 + \gamma_3\dot{\gamma}_2 \\ \mathfrak{m} &= \alpha_2\dot{\alpha} + \beta_2\dot{\beta} + \gamma_2\dot{\gamma} & \mathfrak{q} &= \alpha_1\dot{\alpha}_3 + \beta_1\dot{\beta}_3 + \gamma_1\dot{\gamma}_3 \\ \mathfrak{n} &= \alpha_3\dot{\alpha} + \beta_3\dot{\beta} + \gamma_3\dot{\gamma} & \mathfrak{r} &= \alpha_2\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\gamma}_1, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

riesce T la funzione quadratica omogenea delle $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, fornita da (1) del § 5, e per conseguenza funzione delle $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, α_1, β_1, γ_1, α_2, etc. $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\alpha}_2$, etc. composta con quelle conformemente alle (10).

Per le quali relazioni, indicando con λ una qualunque delle tre lettere α, β, γ, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0 \\ &\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\lambda_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\lambda_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\lambda_3 \\ &\frac{\partial T}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\dot{\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}}\dot{\lambda}_3 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_1} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\lambda_2 \\ &\frac{\partial T}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\dot{\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\dot{\lambda}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}\lambda_3 \\ &\frac{\partial T}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\dot{\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}\dot{\lambda}_2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_3} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}}\lambda_1. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Se ne conclude, senz'alcun calcolo, conformemente alle suddette equazioni (5) del § 106,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\alpha_3\right) = \mathrm{X}\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\beta_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\beta_3\right) = \mathrm{Y}\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\gamma_3\right) = \mathrm{Z},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

equazioni corrispondenti a $\varepsilon = l', m', n'$.

L'equazione corrispondente a $\varepsilon = p'$ risulta

$$-\gamma \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta} + \beta \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma}$$

$$+ \Sigma_s\left[-\gamma_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta_s} - \frac{\partial T}{\partial \beta_s}\right) + \beta_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma_s} - \frac{\partial T}{\partial \gamma_s}\right)\right] = \mathrm{L}$$

$$(s = 1, 2, 3).$$

E di qui, introducendovi le (11), riunendo i termini dove comparisce il simbolo della derivata di T rispetto a ciascuna delle $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, ed eseguendo ovvie riduzioni, si deduce la prima delle tre

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}} + (\beta\gamma_2 - \gamma\beta_2)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}} + (\beta\gamma_3 - \gamma\beta_3)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\\
&\qquad + \alpha_1\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\Big] = \mathrm{L}.\\
&\qquad\qquad (\alpha, \beta, \gamma) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Per esempio, per gruppo di termini dove figura $\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}$ si trova

$$-\gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\beta_1\right) + \beta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\gamma_1\right)$$

$$+ \gamma_1\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\dot\beta\right) - \beta_1\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\dot\gamma\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\beta\gamma_1\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\gamma\beta_1\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\right):$$

per gruppo di termini dove figura $\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}$,

$$-\gamma_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} \beta_3\right) + \gamma_3 \left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} \dot{\beta}_2\right)$$

$$+\beta_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} \gamma_3\right) - \beta_3 \left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} \dot{\gamma}_2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}\right] = \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}\right).$$

Un'altra forma delle trovate due terne di equazioni, si ottiene moltiplicando le (12) e le (13) separatamente per $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$, e, ciascuna volta, sommando le tre equazioni, così moltiplicate.

Applicando l'identità

$$\lambda \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\lambda\mu}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}\mu ,$$

e valendosi delle (10), si ricava dalle (12)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\mathfrak{r} - \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\mathfrak{q} = \mathfrak{X} \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\mathfrak{p} - \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\mathfrak{r} = \mathfrak{Y} \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}} + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\mathfrak{q} - \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\mathfrak{p} = \mathfrak{Z} ;
\end{aligned}\right\} \quad (12')$$

e dalle (13), preventivamente trasformate coll'ajuto delle (12) in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\alpha_3\right)$$

$$= L^* - \dot{\beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\gamma_2\right) + \dot{\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\beta_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\beta_3\right),$$

dove (L*, M*, N*) dinota il momento delle forze impresse rispetto al punto (α, β, γ), analogamente

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} + \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} + \mathfrak{m}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}} - \mathfrak{n}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}} &= \mathfrak{L}^* \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} + \mathfrak{r}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{p}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} + \mathfrak{n}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}} - \mathfrak{l}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}} &= \mathfrak{M}^* \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} + \mathfrak{p}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} - \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} + \mathfrak{l}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}} - \mathfrak{m}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}} &= \mathfrak{N}^*.
\end{aligned}\right\} \quad (13')$$

Consideriamo anche un solido avente un punto (x^*, y^*, z^*) vincolato a possedere un movimento prestabilito, per modo che x^*, y^*, z^* siano funzioni prestabilite del tempo t, e assumiamo le stesse coordinate $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s, (s = 1, 2, 3)$ del caso precedente. Oltre le condizioni (2), abbiamo ora

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} + q(z^* - \gamma) - r(y^* - \beta) &= \dot{x}^* \\
\frac{d\beta}{dt} + r(x^* - \alpha) - p(z^* - \gamma) &= \dot{y}^* \\
\frac{d\gamma}{dt} + p(z^* - \beta) - q(x^* - \alpha) &= \dot{z}^*
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

dove

$$\left.\begin{aligned}
p = \Sigma_s \beta_s \frac{d\gamma_s}{dt} \qquad q = \Sigma_s \gamma_s \frac{d\alpha_s}{dt} \qquad r = \Sigma_s \alpha_s \frac{d\beta_s}{dt}, \\
(s = 1, 2, 3)
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

equazioni della specie (3): e queste rappresentano un vincolo intrinseco del solido.

Dovremo quindi aggiungere alle (4) tre condizioni della specie (5), corrispondenti alle suddette, per formare il sistema, relativo a questo caso, delle equazioni che definiscono $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha_s$, $\delta\beta_s$, $\delta\gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$. Tenendo conto delle (6), che corrispondono alle (15), queste saranno

$$\delta\alpha + q'(z^* - \gamma) - r'(y^* - \beta) = 0$$

etc.

ossia

$$\left.\begin{aligned}\delta\alpha &= q'(\gamma - z^*) - r'(\beta - y^*)\\ \delta\beta &= r'(\alpha - x^*) - p'(\gamma - z^*)\\ \delta\gamma &= p'(\beta - y^*) - q'(\alpha - x^*),\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

colle quali le $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, non altrimenti che le $\delta\alpha_s$, $\delta\beta_s$, $\delta\gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$, per le (7), sono espresse in termini dei tre parametri indipendenti p', q', r', che, nel presente caso, rappresentano le ε.

Si ha poi, per un punto qualunque,

$$\begin{aligned}\delta x &= q'(z - z^*) - r'(y - y^*)\\ \delta y &= r'(x - x^*) - p'(z - z^*)\\ \delta z &= p'(y - y^*) - q'(x - x^*),\end{aligned}$$

che si possono concepire formate, introducendo le (16) nelle (8), o anche dedotte direttamente dalle (16) coll'osservazione che (α, β, γ) rappresenta un punto qualsivoglia del solido considerato.

Quindi (cfr. § 11)

$$\Pi = L^* p' + M^* q' + N^* r',$$

indicando con L^*, M^*, N^* le componenti secondo gli assi di riferimento del momento delle forze impresse rispetto al punto (x^*, y^*, z^*), cioè rispetto al posto del punto vincolato al supposto istante, come polo.

E ciò premesso, non si ha più che da applicare le formole generali (5) del § 106.

Conformemente a queste, l'equazione relativa a $\varepsilon = p'$ risulta

$$-(\gamma - z^*)\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta} + (\beta - y^*)\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma}$$

$$+\Sigma_s\left[-\gamma_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta_s} - \frac{\partial T}{\partial \beta_s}\right) + \beta_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma_s} - \frac{\partial T}{\partial \gamma_s}\right)\right] = L^*.$$

Donde, con un procedimento come quello adoperato nel caso precedente, si deduce la prima delle tre

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big\{\Big[(\beta - y^*)\gamma_1 - (\gamma - z^*)\beta_1\Big]\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}}\\&\quad+\Big[(\beta - y^*)\gamma_2 - (\gamma - z^*)\beta_2\Big]\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}}\\&\quad+\Big[(\beta - y^*)\gamma_3 - (\gamma - z^*)\beta_3\Big]\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}\\&\quad+\alpha_1\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\Big\}\\&= L^* + (\beta_1\dot z^* - \gamma_1\dot y^*)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{l}} + (\beta_2\dot z^* - \gamma_2\dot y^*)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{m}} + (\beta_3\dot z^* - \gamma_3\dot y^*)\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{n}}.\\&\qquad(\alpha, \beta, \gamma)\quad(x, y, z)\quad(L, M, N)\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Si vedono le semplificazioni, che nascono, assumendo il punto vincolato per origine degli assi mobili, o supponendo che sia fisso, cioè $\dot x^* = \dot y^* = \dot z^* = 0$.

Facendo ambedue le ipotesi, si ottiene

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\right) = L^*.\\&\qquad(\alpha, \beta, \alpha)\qquad(L, M, N)\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Donde si ricava, moltiplicando per $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$, e ciascuna volta sommando [cfr. (12'), (13')],

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{r}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} = \mathfrak{L}^*\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} - \mathfrak{p}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} = \mathfrak{M}^*\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} - \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} + \mathfrak{p}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} = \mathfrak{N}^*.\end{aligned}\right\}\quad(18')$$

Osservazione 1.ª — Fino all'equazione (17) lo stesso calcolo si applica alla formazione delle equazioni differenziali del movimento di un solido vincolato a rotolare senza strisciare sopra un piano possedente un movimento prestabilito: bastando solo,

per passare dal precedente caso a questo, intendere per x^*, y^*, z^*, le coordinate del punto a contatto al tempo t, delle quali sappiamo formare l'espressione in termini di t, α, β, γ, $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, e per $\dot{x}^*$, $\dot{y}^*$, $\dot{z}^*$ le componenti della velocità del punto *del piano* a contatto allo stesso tempo t, che sappiamo pure come esprimere in funzione di x^*, y^*, z^* e di t (cfr. § 19).

Osservazione 2.ª — Si notino le espressioni che, in virtù del teorema della quantità di moto e delle aree, risultano dalle precedenti equazioni per la quantità di moto, e per la quantità di moto areale, rispetto all'origine degli assi mobili, nel caso del solido libero, e per la quantità di moto areale rispetto al punto vincolato nei seguenti.

§ 109. — Collegando colle trovate equazioni differenziali del movimento le (2), nel caso del solido libero, le (2) e le (14), nel caso del solido vincolato, formeremo un sistema di dodici equazioni, quante sono le coordinate α, β, γ, $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 3)$.

Come pure, esprimendo le $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, e le loro derivate rispetto a t, in funzione degli angoli φ, f, θ e delle loro derivate rispetto a t, oltre di che, nel caso del solido con un punto vincolato a possedere un movimento prestabilito, assumendo questo punto per origine della terna degli assi mobili, le (2), e, nel secondo caso, le (2) e le (14), riusciranno identicamente soddisfatte, e resteranno tante equazioni quanti sono i gradi di libertà del sistema fra le coordinate libere $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, f, \theta$ oppure φ, f, θ.

Nel caso poi del solido vincolato a rotolare senza strisciare sopra un piano in movimento prestabilito, riusciranno allo stesso modo identicamente soddisfatte le (2), e resteranno sei equazioni — le (14) e le (17) — fra $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, f, \theta$, coordinate normali: nè vi ha luogo, essendo il sistema, in questo caso, anolonomo, a introdurre coordinate libere, come nei precedenti.

Equazioni di Lagrange.

§ 110. — Supponiamo che il sistema considerato sia olonomo, e indichiamo con $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ una specie di coordinate libere. Le (5) del § 106, applicate a queste coordinate, diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta} = \mathrm{H},$$

con

$$\Pi = \Sigma \, \Pi \, \delta \eta .$$

Le quali equazioni possono intendersi dedotte dalle suddette, facendovi $E^{(\xi)} = 1$, successivamente, per ogni coordinata η, e $E^{(\xi)} = 0$ per le rimanenti: oppure dalla (2) dello stesso § 106, valendosi dell'indipendenza delle $\delta \eta$.

Questa è la così detta « seconda forma delle equazioni del movimento di Lagrange », che abbiamo altrove dedotto per altra via (cfr. § 52).

Applicazione alla formazione delle equazioni differenziali delle geodetiche di una superficie.

§ 111. — Sia una superficie rappresentata da

$$x = x\,(u, v), \qquad y = y\,(u, v), \qquad z = z\,(u, v),$$

dove u, v indicano due variabili indipendenti: per modo che, per ogni linea giacente sulla superficie, abbiasi

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 .$$

Concepito un punto mobile vincolato a mantenersi su questa superficie, si potranno assumere u, v per sue coordinate libere. E poichè, supposte nulle le forze impresse, il movimento del punto sarà uniforme, e la sua trajettoria una geodetica della superficie, si avrà, indicando con a una costante,

$$\frac{ds}{dt} = a ,$$

ed equazioni differenziali delle geodetiche della superficie saranno

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial T}{\partial v} = 0$$

dove

$$2\,T = E\dot{u}^2 + 2\,F\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2,$$

e giova notare che

$$\frac{d^n}{d\,t^n} = a^n \frac{d^n}{d\,s^n}.$$

Per altre applicazioni vedasi il § 53.

Equazioni di Appell.

§ 112. — Le equazioni generali (5) del § 106

$$\Sigma_\xi \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \mathrm{E}^{(\xi)} = P^{(\varepsilon)}, \tag{1}$$

dove le $\mathrm{E}^{(\xi)}$, $P^{(\varepsilon)}$ si devono intendere definite da

$$\delta \xi = \Sigma_\varepsilon \, \mathrm{E}^{(\xi)} \varepsilon, \qquad \Pi = \Sigma_\varepsilon \, P^{(\varepsilon)} \varepsilon, \tag{2}$$

sono suscettibili di una forma semplice ed elegante, scoperta da Appell *.

Concepiamo, conformemente alle equazioni traducenti i vincoli

$$\Sigma \, \Xi_i \, \dot{\xi} = T_i\,, \qquad (i = 1, 2, \dots \mu) \tag{3}$$

espresse le $\dot{\xi}$ per mezzo di funzioni lineari di $\nu - \mu$ parametri $e_1, e_2, \dots e_{\nu-\mu}$, vale a dire, stabilite le formole

$$\dot{\xi} = A^{(\xi)} + \Sigma_\varepsilon \, \mathrm{E}^{(\xi)} e, \tag{4}$$

---

* *Appell: Sur les mouvements de roulement. Équations analogues à celles de Lagrange.* (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 1899). *Sur une forme générale des équations de la Dynamique* (Giornale di Crelle, t. CXXI. 1900).

dove la sommatoria è sempre intesa applicata agli indici delle ϵ, che sono gli stessi come quelli delle e.

Chiameremo, con Volterra *, i parametri $e_1, e_2, \dots e_{\nu-\mu}$ una specie di « caratteristiche » del movimento. Esse individuano, ad ogni istante, l'atto di movimento del mobile, conformemente ai supposti vincoli.

Dalle (4) segue (indicando con due punti le derivate seconde rispetto a t)

$$\ddot{\xi} = \Sigma_\epsilon \, \mathrm{E}(\xi) \, \dot{e} + \text{etc.} \tag{4'}$$

dove i termini non specificati non contengono le $\dot{e}$. Quindi

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \dot{e}}. \tag{5}$$

Introduciamo ora l'espressione di Appell

$$S = \frac{1}{2} \Sigma \int_\tau k \left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 \right) d\tau, \tag{6}$$

formata coll'accelerazione allo stesso modo come l'espressione della forza viva colla velocità. Si riconosce agevolmente che si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\xi}}. \tag{7}$$

Difatti

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\xi}} = \Sigma \int_\tau k \left(\ddot{x} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \ddot{\xi}} + \ddot{y} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{\xi}} + \ddot{z} \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{\xi}} \right) d\tau.$$

Ma

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \Sigma_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \dot{\xi}, \qquad \ddot{x} = \Sigma_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \ddot{\xi} + \text{etc.}, \tag{8}$$

---

* *Sopra una classe di equazioni dinamiche* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. XXXIII, 1898).

dove i termini non specificati non contengono $\ddot{\xi}$, donde

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \ddot{\xi}}$$

e le analoghe. Quindi

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\xi}} = \Sigma \int_\tau k\left(\ddot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\xi}} + \ddot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\xi}} + \ddot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\xi}}\right) d t.$$

E stando

$$T = \frac{1}{2} \Sigma \int_\tau k\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) d\tau,$$

anche

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\xi}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \Sigma \int_\tau k\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) d\tau$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi},$$

poichè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \, \partial t} + \Sigma_{\xi'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi \, \partial \xi'} \dot{\xi}' = \frac{\partial^2 x}{\partial t \, \partial \xi} + \Sigma_{\xi'} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi' \, \partial \xi} \dot{\xi}' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi}.$$

Ciò posto, per (5) e (7), le (1) diventano

$$\Sigma_\xi \frac{\partial S}{\partial \ddot{\xi}} \frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{e}} = P^{(\varepsilon)},$$

ossia, poichè S dipende dalle $\dot{e}$ per mezzo delle $\dot{\xi}$, e non altrimenti,

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}} = P^{(t)}, \tag{9}$$

che è la forma che volevamo ottenere*.

Riferendoci alla forma primitiva (1) di queste equazioni, si vede come potremo sempre immaginarne eliminate le e, $\dot{e}$, per mezzo delle (4) e (4'). Ma potremo anche concepirle come collegate colle (4), per formare un sistema di equazioni differenziali, dove il tempo t rappresenta la variabile indipendente, e fungono da incognite le coordinate ξ e le caratteristiche e, in numero eguale a quello delle incognite medesime, atto a determinarle in funzione del tempo, col concorso dei dati iniziali.

Applicazione al movimento di un cerchio omogeneo determinato dal vincolo di rotolare senza strisciare sopra un piano fisso, non verticale, e dalla gravità.

(Sistema anolonomo - tre gradi di libertà - vincoli indipendenti dal tempo).

§ 113. — Assumiamo il piano fisso per piano xy, e volgiamo l'asse delle z in alto, così da formare angolo ottuso coll'orientazione della gravità: dalla qual parte intenderemo trovarsi il cerchio. Collochiamo nel centro del cerchio l'origine degli assi invariabilmente uniti ad esso, e sia l'asse delle $\mathfrak{z}$ perpendicolare al suo piano: con che la terna medesima sarà formata con assi principali d'inerzia relativi al centro di massa. Del resto conserviamo ai simboli il significato con cui furono ripetutamente adoperati.

Prendiamo per coordinate del mobile $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s (s = 1, 2, 3)$. Abbiamo

---

* Cfr. *G. A. Maggi:* Mem. cit. a pag. 185.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}}{dt} + q\,(z^* - \bar{z}) - r\,(y^* - \bar{y}) = 0\\
&\frac{d\bar{y}}{dt} + r\,(x^* - \bar{x}) - p\,(z^* - \bar{z}) = 0\\
&\frac{d\bar{z}}{dt} + p\,(y^* - \bar{y}) - q\,(x^* - \bar{x}) = 0,\\
&\frac{d\alpha_s}{dt} = q\beta_s - r\beta_s, \quad \frac{d\beta_s}{dt} = r\alpha_s - p\gamma_s, \quad \frac{d\gamma_s}{dt} = p\beta_s - q\gamma_s.
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

E con questo p, q, r, componenti della velocità angolare al tempo t secondo gli assi fissi, costituiscono un sistema di caratteristiche.

Infatti, abbiamo

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{x}^* = -R\cos f \qquad \mathfrak{y}^* = -R\sin f, \qquad \mathfrak{z}^* = 0\\
&x^* = \bar{x} + \alpha_1\mathfrak{x}^* + \alpha_2\mathfrak{y}^*, \quad y^* = \bar{y} + \beta_1\mathfrak{x}^* + \beta_2\mathfrak{y}^*, \quad z^* = 0:
\end{aligned}\right\}(2)$$

mediante le quali relazioni i coefficienti di p, q, r riescono funzioni note delle coordinate.

Ora, si ha, per un punto qualunque (x, y, z) o $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$ del cerchio,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\,\mathfrak{x} + \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\,\mathfrak{y};$$

donde, valendosi di

$$\int_\tau k\,\mathfrak{x}\,d\tau = \int_\tau k\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,d\tau = 0, \qquad \int_\tau k\,d\tau = M, \qquad \int_\tau k\,\mathfrak{x}^2\,d\tau = \frac{2}{3}MR^2$$

e delle analoghe formole, si ricava

$$S = \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3}MR^2\sum_{1}^{2}{}_s\left[\left(\frac{d^2\alpha_s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\beta_s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\gamma_s}{dt^2}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

D'altra parte, derivando le (1), otteniamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= q\frac{d(\bar{z}-z^*)}{dt} - r\frac{d(\bar{y}-y^*)}{dt} + \dot{q}(\bar{z}-z^*) - \dot{r}(\bar{y}-y^*)\\ \frac{d^2 \alpha_s}{dt^2} &= q\frac{d\gamma_s}{dt} - r\frac{d\beta_s}{dt} + \dot{q}\gamma_s - \dot{r}\beta_s,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

e le formole analoghe.

Infine,

$$\Pi = Mg\left[-(\bar{y}-y^*)p' + (\bar{x}-x^*)q'\right].$$

Le equazioni di Appell risultano quindi

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{p}} = -Mg(\bar{y}-y^*) \qquad \frac{\partial S}{\partial \dot{q}} = Mg(\bar{x}-x^*) \qquad \frac{\partial S}{\partial \dot{r}} = 0,$$

dove i primi membri si formeranno agevolmente con (3) e (4), e nei secondi membri si debbono introdurre le (2).

Queste, collegate colle (1), formano un sistema di quindici equazioni differenziali, atto a determinare in funzione del tempo t le dodici coordinate e le tre caratteristiche *.

Teorema di Gauss o della minima costrizione**.

§ 114. — Il ragionamento che vale per dimostrare, coi termini di Hertz, che un sistema, nell'ipotesi che le forze impresse siano nulle, descriverà una direttissima (cfr. § 104), si applica a dimostrare, nel caso più generale che le forze impresse siano rappresentate da forze limite qualsivogliano (X, Y, Z), applicate ai singoli punti, che

$$I = \int_\tau k\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\right]d\tau, \quad (1)$$

* V. a proposito di questo problema la citata Memoria di *Appell: Sur une forme générale des équations de la Dynamique*.

** *Costrizione* traduce l'originale *Zwang*, nel presente significato, meglio di *sforzo*, ch'è il termine comunemente usato.

sotto la condizione che, all'istante considerato, sia fissata la posizione e la velocità dei singoli punti, riceve un valor minimo pel movimento effettivo, confrontato coi movimenti che soddisfanno agli stessi vincoli.

Ora

$$\sqrt{\frac{I}{M}},$$

indicando con M la massa del mobile, si può considerare come l'espressione della media quadratica delle differenze fra l'accelerazione effettiva e la forza acceleratrice impressa dei singoli punti, differenti, l'una dall'altra, a cagione dei vincoli. Ciò che secondo Hertz misura lo « *Zwang* » — tradotto da noi « costrizione » — mentre I si riduce, in sostanza, nelle indicate concondizioni, a ciò che collo stesso nome chiamò prima Gauss, per stabilire il principio, contenuto nella proposizione in discorso, che il movimento dei sistemi materiali avviene così da presentare, ad ogni istante, la massima concordanza col movimento libero, cioè col movimento determinato dalle forze impresse, senza concorso di vincoli *. Altro principio, che, come i precedenti, e collo stesso significato, può essere assunto come fondamento dell'equazione generale di d'Alembert e Lagrange.

Da questa proposizione si possono dedurre direttamente le equazioni di Appell, concependo introdotte in (1) le seconde delle (8) del § 112, e osservando che il confronto fra i valori di I, a cui la stessa proposizione si riferisce, suppone le ξ e le e invariabilmente fornite dei valori che competono alla posizione e all'atto di movimento effettivo: per modo che è riservato a I di riuscire minimo, concepito come funzione delle $\dot{e}$. Si ottengono con questo le equazioni

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{e}} = 0,$$

tante quante sono le e: le quali, avvertendo che le X, Y, Z non dipendono da $\dot{e}$, e valendosi delle formole di posizione (4) del

* *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.* Gesammelte Werke, t. V.

t. Si vede come, dato *t*, riesce fissata la po-
si, in seguito a che $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ determinano la posi-
mobile.

del parallelogrammo delle velocità, le compo-
li assi mobili, nella loro posizione al tempo *t*,
el punto nel suo movimento effettivo, sono

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y} + \dot{\mathfrak{x}} \\ \mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z} + \dot{\mathfrak{y}} \\ \mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{z}}. \end{array}\right\} (1)$$

, $\mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ indicano le componenti secondo gli stessi
velocità dell'origine e della velocità angolare

ntesa 1 la grandezza della massa del punto, per
l movimento effettivo,

$$\cdot \mathfrak{r}\mathfrak{y})^2 + \cdots + 2(\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y})\dot{\mathfrak{x}} + \cdots + \dot{\mathfrak{x}}^2 + \cdots$$

$$\cdot \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y} + \dot{\mathfrak{x}}$$

$$+ \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z})\mathfrak{r} - (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x})\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\dot{\mathfrak{y}} - \mathfrak{q}\dot{\mathfrak{z}}$$

$$\cdot = \frac{d\mathfrak{l}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{z} - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{y} + \mathfrak{q}\dot{\mathfrak{z}} - \mathfrak{r}\dot{\mathfrak{y}} + \ddot{\mathfrak{x}}.$$

uazione di Lagrange (§ 110)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}} = \mathfrak{X},$$

enta la componente delle forze impresse secondo
lle $\mathfrak{x}$, diventa

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}' + 2(\dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{r} - \dot{\mathfrak{z}}\mathfrak{q})$$

$$\mathfrak{z} - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{y} + \mathfrak{q}(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x}) - \mathfrak{r}(\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z}).$$

§ 106, e (8) del § 101, si riconducono con calcolo spontaneo alle (9) del § 112 *.

Reciprocamente, riconosciuto che le equazioni di Appell costituiscono una forma delle equazioni del movimento, la circostanza che esse coincidono colle condizioni che determinano, nelle prescritte condizioni, il minimo di I — del quale, per la natura dell'espressione, si può ammettere *a priori* l'esistenza — fornisce una dimostrazione della proposizione in discorso, consistente in questo, ch'essa si riconduce all'equazione di d'Alembert e Lagrange.

Equiparazione della teoria del movimento relativo.

§ 115. — I risultati ottenuti in questa sezione si applicano senza alcuna modificazione al movimento relativo, bastando di considerare le coordinate competenti a questo movimento come coordinate atte a individuare la posizione del mobile col concorso del tempo, conformemente alla legge prestabilita del movimento degli assi mobili (cfr. § 93). Così, con questo metodo non occorre introdurre *a priori* forze apparenti. Ciò non toglie che le equazioni, formate col tipo generale, siano suscettibili di semplificazioni particolari a questo caso: per le quali rimandiamo ai trattati più estesi. A questo concetto rispondono le equazioni di Bour e di Gilbert **.

Consideriamo, in via d'esempio, il caso semplicissimo del movimento di un punto relativo ad una terna d'assi mobili, considerati come fissi.

Siano perciò $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ le coordinate del punto mobile rispetto alla terna degli assi mobili nella sua posizione al tempo t, e α, β, γ, $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s = 1, 2, 4)$ siano le coordinate dell'origine, e i coseni di direzione degli assi mobili medesimi, allo stesso tempo t,

* Cfr. la Memoria ripetutamente citata di *Appell* nel Giornale di Crelle.

** V. per esempio *Appell: Traité de Mécanique*, II Partie (1896), § 459.

funzioni date di t. Si vede come, dato t, riesce fissata la posizione degli assi, in seguito a che $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ determinano la posizione del punto mobile.

Pel teorema del parallelogrammo delle velocità, le componenti secondo gli assi mobili, nella loro posizione al tempo t, della velocità del punto nel suo movimento effettivo, sono

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y} + \dot{\mathfrak{x}} \\ \mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z} + \dot{\mathfrak{y}} \\ \mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{z}}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ indicano le componenti secondo gli stessi assi mobili della velocità dell'origine e della velocità angolare degli assi.

Ne segue, intesa 1 la grandezza della massa del punto, per la forza viva del movimento effettivo,

$$2T = (\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y})^2 + \cdots + 2(\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y})\dot{\mathfrak{x}} + \cdots + \dot{\mathfrak{x}}^2 + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{x}}} = \mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y} + \dot{\mathfrak{x}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}} = (\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z})\mathfrak{r} - (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{z})\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\dot{\mathfrak{y}} - \mathfrak{q}\dot{\mathfrak{z}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{x}}} = \frac{d\mathfrak{l}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{z} - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{y} + \mathfrak{q}\dot{\mathfrak{z}} - \mathfrak{r}\dot{\mathfrak{y}} + \ddot{\mathfrak{x}}.$$

Quindi l'equazione di Lagrange (§ 110)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}} = \mathfrak{X},$$

in cui $\mathfrak{X}$ rappresenta la componente delle forze impresse secondo l'asse mobile delle $\mathfrak{x}$, diventa

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}' + 2(\dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{r} - \dot{\mathfrak{z}}\mathfrak{q})$$

dove

$$\mathfrak{X}' = \frac{d\mathfrak{l}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{z} - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{y} + \mathfrak{q}(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x}) - \mathfrak{r}(\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z}).$$

Si riconosce agevolmente, col modello delle formole (1) e (2) del § 10, come, indicando con X' la componente secondo l'asse fisso delle x del vettore $(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}')$, sarà

$$X' = \frac{d\,[(\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y})\,\alpha_1 + (\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z})\,\alpha_2 + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x})\,\alpha_3]}{dt}$$

dove $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ devono trattarsi come costanti: per cui questo vettore non è altro che la forza di trascinamento competente al supposto istante. Infine, il terzo termine riesce senz'altro la componente della forza centrifuga composta. Così si ritrova il teorema di Coriolis *.

Applicazione al giroscopio di Foucault.

(Sistema olonomo - due gradi di libertà - vincoli del movimento effettivo dipendenti dal tempo).

§ 116. — Per mostrare l'applicazione delle equazioni di Lagrange al movimento relativo in un problema interessante, il quale, d'altra parte, si presta alla verificazione sperimentale dei risultati del calcolo, esponiamo la teoria dell'apparecchio conosciuto col nome di « Giroscopio di Foucault », immaginato e impiegato da questo fisico per fornire, come il pendolo, una prova visibile del movimento diurno del globo terrestre.

Trattasi di studiare il movimento relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al globo terrestre di un solido omogeneo, di rotazione, nell'ipotesi che questo movimento sia determinato dal vincolo che il centro di massa sia invariabilmente unito al globo, e l'asse polare contenente il centro di massa, obbligato a mantenersi in un certo piano, pure invariabilmente unito col globo, e dalla gravità.

Indichiamo con ξ, η, ζ la terna degli assi invariabilmente unita al globo, e supponiamola formata, assumendo per origine il centro

---

* *Meccanica*, § 201.

di massa del solido, per piano $\xi\eta$ il piano in cui è obbligato a mantenersi l'asse polare, e per asse delle ξ la projezione su questo piano della parallela all'asse del mondo, volta verso nord, descritta pel suddetto centro di massa del solido. L'asse delle ζ sia, per fissar le idee, volto in alto. Rappresentiamo con $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ la terna formata cogli assi principali d'inerzia del solido relativi al centro di massa, e l'asse delle $\mathfrak{z}$ sia l'asse polare, preso in un certo senso. Dinotino infine φ, f, ϑ gli angoli di direzione di questa terna per rispetto alla precedente (cfr. § 3). Sarà costantemente

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}: \tag{1}$$

φ sarà la misura dell'angolo formato dall'asse delle $\mathfrak{z}$ coll'asse delle ξ, che fissa la posizione dell'asse polare nel piano assegnatogli: f la misura dell'angolo formato dall'asse delle ζ coll'asse delle $\mathfrak{x}$, che fissa l'azimut del solido intorno all'asse. Così, φ e f determinano la posizione del solido per rispetto alla terna ξ, η, ζ; e poichè la posizione di questi, per rispetto ad una terna di riferimento, è nota ad ogni tempo, in conseguenza del noto movimento del globo, le φ, f sono coordinate atte a determinare la posizione del solido per rispetto alla stessa terna di riferimento coll'ajuto del tempo. Il movimento rispetto alla terna di riferimento — che intenderemo invariabilmente collegata colle stelle fisse — è quello che chiamiamo anche movimento effettivo.

Ne viene che la determinazione di φ e f in funzione di t, vale a dire la descrizione del considerato movimento relativo, è contenuta nelle due equazioni (§ 110).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial T}{\partial f} = 0, \tag{2}$$

dove T rappresenta la forza viva del solido nel suo movimento *effettivo*, e per i secondi membri si è posto zero, perchè il lavoro della gravità è nullo per ogni atto di movimento virtuale del solido per cui varii la sola φ o la sola f, ad un istante qualsivoglia.

Per formare T ci serve (2) del § 8, dove $\overline{v}$ rappresenti la grandezza della velocità del movimento effettivo del centro di massa del

solido, e $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, per un momento, le componenti secondo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ della velocità angolare del movimento effettivo del solido, somma geometrica della velocità angolare del suo movimento relativo alla terna mobile ξ, η, ζ e della velocità angolare di questa, che è quella del movimento diurno del globo.

Possiamo prescindere senz'altro dal termine $\frac{1}{2} M \overline{v}^2$, che non dipende da altra variabile che il tempo esplicito.

Indichiamo poi con α la grandezza dell'angolo formato dall'asse del mondo volto a nord coll'asse delle ξ, sua projezione sul piano assegnato all'asse polare del solido: con a_1, a_2, a_3 i suoi coseni di direzione per rispetto a $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$: con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni di direzione per rispetto agli stessi assi degli assi delle ξ e delle ζ. Troviamo immediatamente

$$a_1 = \alpha_1 \cos\alpha + \gamma_1 \sin\alpha, \quad a_2 = \alpha_2 \cos\alpha + \gamma_2 \sin\alpha, \quad a_3 = \alpha_3 \cos\alpha + \gamma_3 \sin\alpha$$

$$\alpha_1 = -\sin f \sin\varphi, \quad \alpha_2 = \cos f \sin\varphi \quad \alpha_3 = \cos\varphi$$

$$\gamma_1 = \cos f, \quad \gamma_2 = \sin f \quad \gamma_3 = 0.$$

Con che, dinotando ω la grandezza della velocità angolare del movimento diurno, le sue componenti

$$\omega\, a_1, \qquad \omega\, a_2, \qquad \omega\, a_3$$

secondo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ riescono espresse per φ e f.

Infine, riserbando a $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ il significato di componenti secondo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ della velocità angolare del movimento relativo a ξ, η, ζ, abbiamo, stando (1) [cfr. (3) del § 3],

$$\mathfrak{p} = \cos f\, \dot\varphi \qquad \mathfrak{q} = \sin f\, \dot\varphi \qquad \mathfrak{r} = -\dot f. \tag{3}$$

Eseguiti i calcoli, la parte dell'espressione della forza viva in discorso complementare del termine suddetto, risulta — conservandole il simbolo dell'espressione completa —

$$T = \frac{1}{2}(P\dot\varphi^2 + R\dot f^2) + \omega(P \sin\alpha\, \dot\varphi - R\cos\alpha \cos\varphi \dot f) + \frac{1}{2}\omega^2 K \tag{4}$$

dove

$$K = P(a_1^2 + a_2^2) + R a_3^2 = P(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\varphi) + R\cos^2\alpha \cos^2\varphi$$

rappresenta, per (2) del § 7, la grandezza del momento d'inerzia dal solido per rispetto alla parallela descritta pel centro di massa all'asse del mondo.

Conveniamo di trascurare, per la piccolezza di ω, i termini dell'ordine di ω^2, e, per conseguenza, $\frac{1}{2}\omega^2 K$.

Le (2), dove s'introduca l'espressione di T fornita da (4), così semplificata, si riducono a

$$\frac{d(\dot{f} - \omega \cos\alpha \cos\varphi)}{dt} = 0 \qquad P\frac{d\dot{\varphi}}{dt} - R\,\omega \cos\alpha \sin\varphi \dot{f} = 0.$$

La prima fornisce immediatamente l'integrale

$$\dot{f} - \omega \cos\alpha \cos\varphi = k = \dot{f}_0 - \omega \cos\alpha \cos\varphi_0, \tag{5}$$

in virtù del quale, la seconda, trascurando di nuovo il termine in ω^2, diventa

$$P\frac{d\dot{\varphi}}{dt} - k\,R\,\omega \cos\alpha \sin\varphi = 0.$$

Ora ω e $\cos\alpha$ sono senz'altro positivi, e k, per (5), se si suppone $|\dot{f}_0| > \omega$, si può sempre ridurre negativo, disponendo del senso in cui si prende l'asse polare del solido, per formare l'asse delle $\mathfrak{z}$: il quale si dovrà prendere in modo che risulti $\dot{f}_0 < 0$, cioè nello stesso senso della velocità angolare del solido nel suo movimento intorno all'asse medesimo, o, per l'ultima delle (3), in modo che risulti $\mathfrak{r}_0 > 0$, e cioè che risulti acuto l'angolo formato da esso colla velocità angolare (totale) iniziale del movimento relativo.

Inteso così scelto il senso dell'asse delle $\mathfrak{z}$, che chiameremo anche senso positivo dell'asse polare, poniamo

$$\frac{R}{P} k\,\omega \cos\alpha = -\frac{g}{l},$$

con che l risulterà positiva, e sarà la grandezza di un segmento. La precedente equazione si scriverà

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{6}$$

Questa è la nota equazione del pendolo composto (§ 82): dalla quale ricavato φ in funzione di t, la (5) fornirà f in funzione della stessa t con una quadratura.

Supposto $|\dot{f}_0|$ assai grande in confronto di ω, cioè, in prossimità di un certo istante, abbastanza rapido il movimento di rotazione del solido intorno al proprio asse polare, si ha, per (5), prossimamente

$$\dot{f} = \dot{f}_0 :$$

ossia questo movimento riesce sensibilmente uniforme.

Si conclude poi da (6) che il movimento nel proprio piano dell'asse polare è quello di un pendolo di lunghezza l, inteso che il pendolo si sostituisca coll'asse preso nel senso positivo e la nadirale colla projezione su questo piano della parallela all'asse del mondo, volto a nord, descritta pel centro di massa.

Così l'apparecchio in principio nominato è atto a far la parte della bussola: per la qual ragione è anche chiamato «bussola giroscopica» *.

---

* Per un'estesa trattazione dell'argomento V. la citata *Mécanique Rationnelle* di *Appell*, §§ 464 e segg.

PARTE TERZA

IL TEOREMA DI JACOBI

Forma canonica delle equazioni del movimento.

§ 117. — Consideriamo oramai i sistemi olonomi, e assumendo per determinarne la posizione ad ogni istante, col concorso, se è necessario, del tempo, un insieme di coordinate libere, indichiamole, adottando i simboli classici, con $q_1, q_2, \dots q_n$, conformemente a che poniamo

$$\Pi = \Sigma\, Q\, \delta q. \tag{1}$$

Abbiamo le equazioni di Lagrange (§ 110)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{2}$$

dove

$$T = T_o + T_1 + T_2 \tag{3}$$

è una funzione, in generale, di t, delle q e delle $\dot{q}$, e T_o, T_1, T_2, sono forme, rispetto alle $\dot{q}$, di grado rispettivamente 0, 1°, 2°.

T si riduce a T_2 nell'ipotesi che le $q_1, q_2, \dots q_n$ valgano a determinare la posizione, senza concorso del tempo. Questo è il caso che i vincoli del considerato movimento siano indipendenti dal tempo.

Poniamo (posizione di Poisson)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = p. \qquad (4)$$

I primi membri sono funzioni lineari delle $\dot{q}$, e il determinante dei coefficienti riesce il discriminante di T_2, ossia della forma

$$\frac{1}{2} \int k (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) d\tau$$

$$\delta x = \Sigma \frac{\partial x}{\partial q} \delta q \qquad \delta y = \Sigma \frac{\partial y}{\partial q} \delta q \qquad \delta z = \Sigma \frac{\partial z}{\partial q} \delta q ; \qquad (5)$$

donde segue che dobbiamo supporlo costantemente diverso da o. Infatti, diversamente, la stessa forma si potrebbe annullare, senza che tutte le δq fossero nulle: e ciò non può essere, perchè, convenendo le (5) all'ipotesi che le q determinino la posizione senza concorso del tempo, con che dovranno reciprocamente essere senz'altro determinate dalla posizione del mobile (cfr. § 93)*, l'annullamento della forza viva, rappresentata dalla forma in discorso — vale a dire dello spostamento elementare — trarrà con sè quello di tutte le δq. Potremo quindi sempre dalle (4) ricavare le $\dot{q}$ in funzione lineare delle p, oltre che delle q e di t, che entreranno nei coefficienti. Avremo cioè

$$\dot{q} = \dot{q} (p, q, t).$$

Ora è

$$T = T (q, \dot{q}, t).$$

Poniamo

$$T(q, \dot{q} (p, q, t), t) = (T) (p, q, t).$$

Abbiamo, rappresentando con δp, δq degli incrementi arbitrarii delle p e delle q,

$$\delta (T) = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

---

* È sempre inteso che si prescinde da qualche caso eccezionale, a cui si provvede coll'ajuto della continuità.

dove

$$\delta \dot{q} = \Sigma \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \delta p + \Sigma \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \delta q ;$$

ossia, per (4),

$$\delta (T) = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \Sigma p \delta \dot{q} .$$

Ora si ha

$$\delta (\Sigma p \dot{q}) = \Sigma \dot{q} \delta p + \Sigma p \delta \dot{q} ,$$

posto

$$(\Sigma p \dot{q}) = \Sigma p \dot{q} \, (p, q, t).$$

Quindi

$$\delta (\Sigma p \dot{q}) - \delta (T) = \Sigma \dot{q} \delta p - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} \delta q ;$$

e posto

$$(\Sigma p \dot{q}) - (T) = K,$$

anche

$$\delta K = \Sigma \dot{q} \delta p - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} \delta q,$$

donde si ricava, poichè i δp, δq sono arbitrarii,

$$\dot{q} = \frac{\partial K}{\partial p}, \qquad - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial q}.$$

La prima di queste equazioni può scriversi

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p}, \tag{6}$$

mentre (2), per la seconda e per (4), può porsi sotto la forma

$$\frac{dp}{dt} = Q - \frac{\partial K}{\partial q}. \tag{7}$$

Così otteniamo $2n$ equazioni differenziali del 1° ordine, dove fungono, se si vuole, il tempo t da variabile indipendente, e da incognite le p, q: sistema atto a determinare le incognite medesime in funzione del tempo, col concorso dei loro valori per $t = t_0$, cioè della posizione del mobile (valore delle q), e dell'atto di movimento (valore delle $\dot{q}$, donde, colle (4), e col valore delle q, il valore delle p) ad un istante.

Supponiamo ora che le forze impresse ammettano funzione delle forze, in generale dipendente dal tempo, non però dall'atto di movimento; per modo che, indicando con W una funzione delle q, generalmente anche di t (ma non delle p), abbiasi

$$\frac{\partial W}{\partial q} = Q,$$

mentre

$$\frac{\partial W}{\partial p} = 0.$$

Posto

$$K - W = H,$$

potremo porre il sistema (6), (7) sotto la forma

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{8}$$

che si chiama la « forma canonica delle equazioni della Dinamica » sotto la quale le equazioni del movimento (di un sistema olonomo) furono poste e studiate per la prima volta da Hamilton *.

Nel ricordato caso, particolarmente interessante, che i vincoli siano indipendenti dal tempo, con che T riesce una funzione quadratica omogenea delle $\dot{q}$, si ha, per (4),

$$\Sigma\, p\dot{q} = \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2\,T.$$

* *On a General Method in Dynamics* (Philosophical Transations of the Royal Society of London. 1835).

Allora

$$(\Sigma p\dot{q}) = 2(T), \qquad K = (T), \qquad H = (T) - W. \quad (9)$$

Così, posto, in tal caso,

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{rs}\, m_{rs}\, q_r\, q_s \qquad m_{rs} = m_{sr},$$

dove m_{rs} è funzione delle q, indicando con M_{rs} l'aggiunto di m_{rs} nel discriminante di T, diviso pel discriminante medesimo, si ha senz'altro

$$K = (T) = \frac{1}{2}\Sigma_{rs}\, M_{rs}\, p_r\, p_s.$$

Che se

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 q_2^2 + \cdots + m_n \dot{q}_n^2),$$

si ha semplicemente

$$K = (T) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{m_n}\right).$$

§ 118. — Moltiplicando per $\frac{dp}{dt}$ le equazioni canoniche del primo gruppo, per $\frac{dq}{dt}$ quelle del secondo gruppo, e sottraendo, se ne ricava

$$0 = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \Sigma \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt},$$

ossia

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

per modo che ogniqualvolta H non contiene esplicitamente il tempo, si ha l'equazione integrale

$$H = \text{cost.}$$

Questo si verifica quando i vincoli e la funzione delle forze impresse sono indipendenti del tempo, e poichè nello stesso caso si ha (9) del precedente paragrafo, l'equazione in discorso risulta

$$(T) - W = \text{cost.}$$

esprimente il teorema della conservazione dell'energia (cfr. § 34).

Introduzione al teorema di Jacobi - Equazioni alle derivate parziali di Hamilton.

§ 119. — Concepiamo integrato il sistema delle equazioni canoniche, e ricavatone

$$p = p\,(p^o, q^o, t), \qquad q = q\,(p^o, q^o, t), \tag{1}$$

dove $p_1^o, p_2^o, \ldots p_n^o,\ q_1^o, q_2^o, \ldots q_n^o$ indicano $2n$ costanti arbitrarie, che rappresentano i valori attribuiti per $t = t^o$ alle p e alle q.

Immaginiamo fissati a piacere questi valori iniziali, e chiamiamo movimento effettivo quello che, col concorso di essi, è determinato dalle equazioni canoniche. Intese T e W riferite a questo movimento, potremo introdurvi le (1), con che riusciranno funzioni di t e delle p^o, q^o: e, posto

$$V = \int_{t^o}^{\bar{t}} (T + W)\,dt, \tag{2}$$

dove $\bar{t}$ rappresenta un valore qualunque di t, sarà V una funzione di $\bar{t}$, e dei parametri p^o, q^o, impliciti nella funzione integranda.

Ora, ammessa la risolubilità delle (1) rispetto alle costanti d'integrazione*, concepiamo dedotte dalle seconde di esse

$$p^o = p^o(q, q^o, t).$$

Ne viene

$$p^o = p^o(\bar{q}, q^o, \bar{t}),$$

con che V si presenta come una funzione di $\bar{t}, p^o, q^o$, composta con $\bar{t}, \bar{q}, q^o$.

Quindi

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \delta \bar{q} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q^o} \delta q^o,$$

dove $\delta \bar{q}$, δq^o rappresentano altrettanti valori arbitrarii.

Posto poi

$$\bar{p} = p(p^o, q^o, \bar{t}),$$

pel teorema di Hamilton [(17) del § 101], si ha

$$\delta V = \Sigma \bar{p}\, \delta \bar{q} - \Sigma p^o \delta q^o. \tag{3}$$

Quindi, per detta arbitrarietà, sopprimendo il soprassegno, e con questo intendendo che t rappresenti un valore qualsivoglia del tempo,

$$\frac{\partial V}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^o} = -p^o. \tag{4}$$

Queste equazioni, che sono del tipo

$$E^{(1)}(p, q, t, q^o) = 0, \qquad E^{(2)}(q, t, p^o, q^o) = 0,$$

prese insieme, costituiscono una forma del sistema integrale delle equazioni canoniche.

---

* Non insistiamo, in queste considerazioni introduttive, sulla giustificazione di alcuni particolari, il cui esame sarà a suo luogo esaurito.

Ciò vuol dire che, ammesso che le p, q rappresentino altrettante funzioni di t e delle p^o, q^o, che soddisfanno le (4), esse soddisfaranno le equazioni canoniche, qualunque siano i valori attribuiti a p^o, q^o. E che ciò sia vero si riconosce direttamente, osservando che dalle (4) segue, per definizione, (3), per qualunque valore di $\bar{t}$, cioè l'equazione che traduce il teorema di Hamilton: donde, concepito fissato t^o, scaturiscono, nel modo che abbiamo veduto (§ 110) le equazioni di Lagrange, di cui le equazioni canoniche non sono che una trasformazione, in primo luogo, per $\bar{t}$ abbastanza prossimo a t^o, e quindi, concatenando una successione d'intervalli abbastanza piccoli, per $\bar{t}$ qualsivoglia.

Così, supposto di conoscere $V = V(t, q, q^o)$, si potrà formare senz'altro il sistema integrale delle equazioni canoniche. Vediamo come si trova un'equazione atta a determinarla.

Osserviamo per ciò che da (2) si ricava (scrivendo, a derivazione fatta, t in luogo di $\bar{t}$),

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} = T + W:$$

donde, introducendovi le prime delle (4),

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p \dot{q} - T - W = 0$$

o anche

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\Sigma p \dot{q}) - (T) - W = 0,$$

ossia, mettendo in evidenza le variabili dalle quali dipende $H = K - (T)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(p, q, t) = 0;$$

per cui, invocando di nuovo le prime delle (4), si conclude

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right) = 0. \tag{5}$$

E questa è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine e di secondo grado, dove le $t, q_1, q_2, \ldots q_n$ fungono da variabili indipendenti, e la V da incognita, della quale la nostra V è un integrale con n costanti arbitrarie.

Analogamente, derivando rispetto a t^0, che rappresenta un altro valore qualsivoglia del tempo, e valendosi della seconda delle (4), si trova

$$\frac{\partial V}{\partial t^0} - H\left(-\frac{\partial V}{\partial q^0}, q^0, t^0\right) = 0. \tag{6}$$

La qual condizione è una semplice conseguenza di quanto precede (cfr. Jacobi: *Vorlesungen über Dynamik,* 19[te] Vorles.): ciò che indirettamente emerge dal teorema di Jacobi, che passiamo a dimostrare.

La funzione V di t, delle q, e relativi valori iniziali, fu chiamata da Hamilton « funzione principale »: le equazioni (5) e (6), a cui soddisfa, si sogliono chiamare le « equazioni alle derivate parziali di Hamilton ».

Teorema di Jacobi.

§ 120. — *Definizione.* « Integrale completo » di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine con $n+1$ variabile indipendente, dove l'incognita non figura che per mezzo delle sue derivate, si chiama una funzione di quelle $n+1$ variabile, e di n costanti arbitrarie, tale che, se si formano le sue derivate parziali rispetto alle singole variabili, e fra esse si eliminano le costanti arbitrarie, si ritrova necessariamente l'equazione differenziale proposta, cioè essa e nessun'altra, che non ne sia una pura trasformazione.

Teorema *. — Se

$$V = V(q_1, q_2, \ldots q_n, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \tag{1}$$

* Cfr. *Jacobi: Vorlesungen über Dynamik:* 20 Vorlesung.

è un integrale completo dell'equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots q_n, t\right) = 0, \qquad (2)$$

le equazioni

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta, \quad (3) \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial q} = p, \quad (4)$$

dove a tutte le minuscole vanno attribuiti gli indici 1, 2, ... n, e $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ rappresentano altrettante costanti arbitrarie, costituiscono il sistema integrale del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad (5)$$

nelle quali H rappresenta la funzione delle p, delle q e di t, che si deduce colle sostituzioni (4) dalla funzione egualmente indicata in (2).

Ciò vuol dire che le (3), (4), prese insieme, definiscono le p, q in funzione di t e delle α, β, per modo che, per valori convenienti di questi parametri, le funzioni stesse assumeranno per $t = t^o$ i valori prefissati arbitrarii p^o, q^o : e queste funzioni, qualunque sia il valore di detti parametri, soddisfanno le equazioni differenziali (5), cioè queste equazioni differenziali scaturiscono dalle (3), (4), dove per p, q s'intendano le funzioni di t, α, β dalle stesse equazioni (3), (4) implicitamente determinate.

Ora, osserviamo, in primo luogo, che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_n} \end{vmatrix}$$

non potrà essere identicamente nullo: poichè esso rappresenta determinante funzionale delle $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$ rispetto alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, per modo che, in tal caso, dovrebbe esistere una relazione fra le stesse derivate, e, per avventura, le $q_1, q_2, \ldots q_n$ e t, indipendente da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, la quale non potrebbe ridursi alla (2), perchè non conterrebbe $\frac{\partial V}{\partial t}$: e perciò l'eliminazione delle costanti arbitrarie porterebbe ad altra equazione oltre (2), contro la definizione dell'integrale completo.

Di qui segue, in primo luogo, che le $q_1, q_2, \ldots q_n$ risultano effettivamente dalle (3) determinate in funzione di t e delle costanti α, β: in seguito a che, concependo poste nelle (4), al luogo delle q, le corrispondenti funzioni così determinate, queste equazioni determineranno senz'altro le p in funzione di t e delle α, β.

In secondo luogo, poi, le (4) riescono risolubili per rispetto a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$: per modo che, fissati per $t = t^o$ i valori p^o, q^o delle p e delle q, se ne dedurranno i valori occorrenti di quelle costanti, portando i quali nelle (3), e facendovi $t = t^o$, $p = p^o$, $q = q^o$, si avranno immediatamente anche gli occorrenti valori delle β.

Resta da mostrare come dalle (3), (4), dove per p e q s'intendono poste le funzioni in discorso, seguano le (5).

Perciò osserviamo che, concepito con questa sostituzione rese le (3) altrettante identità, se ne ricava, derivando per rispetto a t,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \, \partial t} + \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \, \partial q} \frac{dq}{dt} = 0. \tag{6}$$

Analogamente, concepito ridotta un'identità la (2), col porvi per V il suo integrale completo indicato colla stessa lettera, se ne ricava, derivando per rispetto alle singole α,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial \alpha} + \Sigma \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q}} \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial \alpha} = 0,$$

la quale, introducendovi le (4), si riduce a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial \alpha} + \Sigma \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial \alpha} = 0. \tag{7}$$

Sottraendo (7) da (6), inteso attribuito lo stesso indice ad α, abbiamo

$$\Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \, \partial q} \left(\frac{dq}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0;$$

per modo che, attribuendo ad α gl'indici 1, 2, ... n, otteniamo un sistema di n equazioni lineari omogenee fra le n differenze

$$\frac{dq}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p},$$

il cui determinante è Δ.

E poichè si è veduto che Δ non sarà identicamente nullo, se ne conclude

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

che sono le prime delle (5).

In secondo luogo, concependo rese identiche le (4), col porvi per p, q le funzioni così indicate, che vi soddisfanno, se ne ricava, derivando per rispetto a t,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial t} + \Sigma' \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial q'} \frac{dq'}{dt}, \tag{8}$$

dove q' riceve i valori $q_1, q_2, \ldots q_n$: mentre da (2), resa identica come prima, si ricava, derivando per rispetto alle singole q,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} + \Sigma' \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q}} \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial q'}.$$

Ora, per (4),

$$\frac{\partial V}{\partial q'} = p',$$

e, per (3), (4) insieme, in conseguenza della prima parte della dimostrazione,

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{d q'}{d t}.$$

Quindi la stessa relazione può scriversi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} + \Sigma' \frac{d q'}{dt} \frac{\partial^2 V}{\partial q \, \partial q'} = 0.$$

Confrontando la quale con (8), si conclude

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

che sono le seconde delle (5).

Così il teorema è dimostrato.

§ 121. — *Funzione caratteristica.* Supponiamo che H non contenga esplicitamente t; e poniamo in tal caso

$$V = -\alpha t + U,$$

dove α rappresenta una costante, e U una funzione di $q_1, q_2, \dots q_n$, e non di t. Ne viene

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Quindi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right) = 0$$

diventa, nella presente ipotesi, e con questa sostituzione,

$$H\left(\frac{\partial U}{\partial q}, q\right) = \alpha, \tag{1}$$

equazione atta a determinare U.

Che se $U = U(q_1, q_2, \dots q_n, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1})$ rappresenta un integrale completo di questa equazione alle derivate parziali, dove le q fungono da variabili indipendenti, e la U da incognita, le (3), (4) del precedente paragrafo si riducono a

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = \beta + t, \qquad \dfrac{\partial U}{\partial \alpha_i} = \beta_i & (i = 1, 2, \dots n - 1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial q} = p. & \end{array}\right\} \quad (2)$$

La U si chiama, con termine di Hamilton, « funzione caratteristica » del proposto problema.

Osserviamo che le precedenti conclusioni stanno indipendentemente da ogni particolare significato della funzione H, la quale può essere supposta, salvo le debite restrizioni analitiche, una funzione qualsivoglia delle relative variabili.

Nella questione dell'integrazione delle equazioni della dinamica, H riuscirà indipendente dal tempo esplicito, quando ne sono indipendenti i vincoli e la funzione delle forze impresse.

Ora, in questo caso, si ha [(9) del § 117]

$$H = (T) - W;$$

e si verifica il teorema della conservazione dell'energia (§ 118),

$$(T) - W = \text{cost.}$$

Quindi la α della precedente equazione (1) rappresenta la costante dell'equazione della conservazione dell'energia: e quell'equazione alle derivate parziali, atta a determinare la funzione caratteristica, si forma semplicemente, ponendo in questa equazione $\dfrac{\partial U}{\partial q}$ al posto di p.

§ 122. — *Eventuale riduzione dell'equazione della funzione caratteristica.* Supposto che il primo membro dell'equazione

$$H\left(\frac{\partial U}{\partial q}, q\right) = \alpha \qquad (1)$$

non contenga esplicitamente una delle q, per esempio, q_1, poniamo

$$U = - \alpha_1 q_1 + U^{(1)},$$

dove α_1 rappresenta una costante e $U^{(1)}$ una funzione di $q_2, q_3, \ldots q_n$, ma non di q_1.

Avremo

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = - \alpha_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_i} \qquad (i > 1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = - q_1.$$

Quindi la (1), nella presente ipotesi, e con questa sostituzione, diventa

$$H\left(- \alpha_1, \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_2}, \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_3} \cdots \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_n}, q_2, q_2, \ldots q_n\right) = \alpha.$$

E, indicando con $U^{(1)} = U^{(1)}(q_2, q_2, \ldots q_n, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n-1})$ un integrale completo di questa equazione, dove le costanti d'integrazione sono $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$, le equazioni integrali delle equazioni canoniche riusciranno rappresentate da

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \alpha} = \beta + t, \qquad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \alpha_1} = \beta_1 + q_1, \qquad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i > 1)$$

$$p_1 = - \alpha_1, \qquad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_i} = p_i \qquad (i > 1).$$

Così, se capita, di seguito.

Esempii.

§ 123. — Mostriamo come, in qualche caso, la funzione caratteristica si possa direttamente e agevolmente determinare.

Perciò, consideriamo il movimento di un punto di massa 1 in un piano, assunto per piano xy, e rappresentate con r, ρ le

grandezze dei raggi spiccati al punto dall'origine e da un altro punto fisso (a, b), cominciamo col trasformare

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

nell'equivalente espressione relativa a quella nuova specie di coordinate.

Troviamo subito, indicando con θ l'angolo formato dai due raggi,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 + 2\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial \rho}\cos\theta,$$

e poichè, indicando con r_0 la grandezza della mutua distanza dei due punti fissi, si ha

$$r_0^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta,$$

anche

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{r^2+\rho^2-r_0^2}{r\rho}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Poniamo ora

$$r + \rho = u, \qquad r - \rho = v,$$

e trasformiamo, alla sua volta, la trovata espressione nell'equivalente relativa, alle u, v che costituiscono pure una specie di coordinate. Abbiamo

$$r = \frac{u+v}{2}, \qquad \rho = \frac{u-v}{2};$$

quindi

$$r^2 + \rho^2 = \frac{u^2+v^2}{2}, \qquad r\rho = \frac{u^2-v^2}{4}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v}.$$

E per, conseguenza, la cercata espressione risulta, effettuate le riduzioni:

$$\frac{4}{u^2 - v^2}\left[(u^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2\right].$$

Indichiamo con $W(u, v)$ l'espressione della funzione delle forze impresse in coordinate u, v; l'equazione per determinare la funzione caratteristica sarà

$$(u^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}(u^2 - v^2)W(u, v)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(u^2 - v^2).$$

Supponiamo ora che sia

$$(u^2 - v^2)\, W(u, v) = \varphi(u) - \chi(v),$$

cioè

$$W(u, v) = \frac{\varphi(u) - \chi(v)}{u^2 - v^2},$$

indicando con $\varphi(u)$, $\chi(v)$ una funzione della sola u e della sola v rispettivamente.

E, in tale ipotesi, indicando con α' una costante arbitraria, poniamo l'equazione precedente sotto la forma

$$(u^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - r_o^2)\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha u^2 + \varphi(u) + \alpha' - (\alpha v^2 + \chi(v) + \alpha')\right].$$

Chiaramente, l'equazione sarà soddisfatta da

$$U = \int^{u} \sqrt{\frac{\alpha u^2 + \varphi(u) + \alpha'}{2(u^2 - r_0^2)}}\, du - \int^{v} \sqrt{\frac{\alpha v^2 + \chi(v) + \alpha'}{2(v^2 - r_0^2)}}\, dv,$$

e, oltre la costante α della conservazione dell'energia, conterrà la costante arbitraria α'. Con ciò U riesce un integrale completo della proposta equazione.

Notiamo che quando sia $\varphi(w) = \chi(w)$, si potrà scrivere più semplicemente

$$U = \int_{v}^{u} \sqrt{\frac{\alpha s^2 + \varphi(s) + \alpha'}{2(s^2 - r_0^2)}}\, ds.$$

La precedente ipotesi si verifica

1° nel movimento per inerzia: in cui $W(u, v) = 0$;

2° nel movimento centrale colla legge newtoniana: in cui, assunto per origine il centro attraente,

$$W(u, v) = \frac{\mu}{r} = \frac{2\mu}{u + v} = \frac{2\mu u - 2\mu v}{u^2 - v^2};$$

3° nel movimento determinato dall'azione newtoniana di due centri fissi, assumendo i quali per poli dei raggi r e ρ, si ha

$$W(u, v) = \frac{\mu}{r} + \frac{\nu}{\rho} = 2\, \frac{(\mu + \nu)\, u - (\mu - \nu)\, v}{u^2 - v^2}.$$

Osserviamo che, nel primo caso, si ha

$$U = \int_{v}^{u} \sqrt{\frac{\alpha s^2 + \alpha'}{2(s^2 - r_0^2)}}\, ds,$$

donde per equazione della trajettoria, secondo il tipo

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha'} = \beta',$$

si deduce

$$\int_u^v \frac{ds}{\sqrt{2(\alpha s^2 + \alpha')(s^2 - r_0^2)}} = 2\beta', \tag{a}$$

dove il primo membro rappresenta la differenza di due integrali ellittici di 1ª specie.

D'altra parte, la trajettoria del punto è una retta, e perciò lineare la sua equazione in coordinate x, y, le quali sono legate con u, v da equazioni algebriche di 2° grado: che se immaginiamo di dedurre per questa via l'equazione della stessa trajettoria in coordinate u, v, troveremo

$$F(u, v) = 0, \tag{b}$$

equazione algebrica.

La relazione tra u e v espressa in forma trascendente da (a) è quindi suscettibile della forma algebrica (b): ciò che mette in evidenza l'esistenza del così detto teorema d'addizione degli integrali ellittici di 1ª specie.

Teorema di Poisson.

§ 124. — « Integrale primo » delle equazioni canoniche

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

si chiama (conformemente alla definizione generale) ogni equazione

$$\varphi(p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n, t) = \alpha,$$

o, scritto succintamente,

$$\varphi(p, q, t) = \alpha, \tag{2}$$

dove α rappresenta una costante disponibile, la quale è soddisfatta dalle funzioni integrali p e q delle (1), cioè dalle funzioni p e q

di t e di $2n$ costanti arbitrarie (tra cui, occorrendo, potrà contarsi α) che soddisfanno le (1), e ricevono, disponendo opportunamente dei valori di dette costanti, per $t = t^0$, valori prefissati p^0, q^0.

Ciò vuol dire che, subordinatamente alle (1), qualunque valore si concepisca per le costanti arbitrarie, deve ridursi la (2) ad un'identità: e perciò aversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{dq}{dt} = 0; \qquad (3)$$

donde segue che condizione necessaria e sufficiente perchè (2) sia un integrale primo delle (1) è che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0, \qquad (4)$$

identicamente, vale a dire qualunque siano i valori attribuiti a t, alle p e alle q. Difatti, questa condizione è necessaria, perchè (4) scaturisce formalmente da (3), introducendo in questa le (1): e, d'altra parte, dovendo

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{t=t^0,\ p=p^0,\ q=q^0} = 0$$

verificarsi per valori quali si vogliano di t^0, p^0, q^0, e per t^0 potendosi intendere assunto qualunque valore di t, la relazione medesima deve stare identicamente. Che se (4) sta identicamente, concepite p e q come funzioni di t, tali da soddisfare le (1), ne segue, introducendovi le medesime, la (3), donde si risale alla (2), la quale, con un determinato valore di t, potrà essere soddisfatta da valori arbitrarii delle p, q: e perciò la condizione in discorso è anche sufficiente.

Ora, rappresentando con f_1, f_2 due funzioni di t, delle p e delle q, si suol porre con Poisson

$$\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial f_2}{\partial p}\right) = (f_1\, f_2),$$

la sommatoria essendo estesa agl'indici 1, 2, ... n delle p, q, e questa espressione si chiama una « parentesi di Poisson ».

La precedente condizione riesce quindi che si abbia identicamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (H\varphi) = 0; \tag{4'}$$

con che φ risulta una soluzione qualsivoglia (purchè riesca una funzione effettiva, e quindi escluso il caso che si riduca ad una costante) di un'equazione alle derivate parziali del 1° ordine lineare, omogenea.

Integrale primo « indipendente dal tempo » si chiama ogni equazione come la precedente quando non vi figura esplicitamente t.

La relativa condizione necessaria e sufficiente è, per (4'), che si abbia

$$(H\varphi) = 0. \; * \tag{5}$$

§ 125**. — *Proprietà di* $(f_1 f_2)$ *- Identità di Poisson.* Seguono immediatamente dalla definizione (3) le relazioni identiche:

$$\left.\begin{aligned} &(f_1 f_1) = 0, \qquad (f_1 F[f_2, f_3, \ldots f_k]) = \sum_{r=2}^{r=k} \frac{\partial F}{\partial f_r}(f_1 f_r) \\ &(f_2 f_1) = -(f_1 f_2), \qquad (f\alpha) = -(\alpha f) = 0 \quad (\alpha = \text{cost.}), \\ &\frac{\partial (f_1 f_2)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} f_2\right) + \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t}\right); \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e si verifica agevolmente l' « identità di Poisson »

$$(f_1 (f_2 f_3)) + (f_2 (f_3 f_1)) + (f_3 (f_1 f_2)) = 0. \tag{7}$$

126. — *Teorema di Poisson.* Se $\varphi = \alpha$, $\chi = \beta$ sono due in-

---

* Per altre proprietà, che completano queste, V. § 132.

** Prosegue la numerazione delle formole fino al § 127.

tegrali primi delle equazioni canoniche, $(\varphi\,\chi)$ soddisfarà all'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (Hf) = 0.$$

Difatti, per (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (H\varphi) = 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} + (H\chi) = 0. \tag{8}$$

D'altra parte, per (7):

$$(H(\varphi\,\chi)) + (\varphi\,(\chi H)) + (\chi\,(H\varphi)) = 0.$$

Quindi, per (8) e (6)

$$\big(H(\varphi\chi)\big) + \left(\varphi\,\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\chi\right) = 0:$$

e per l'ultima delle (6)

$$\frac{\partial\,(\varphi\chi)}{\partial t} + (H(\varphi\chi)) = 0$$

C. V. D.

Allora potranno darsi due casi:

1° che $(\varphi\,\chi)$ si riduca ad una costante (per esempio, se $\chi = F(\varphi)$, sarà $(\varphi\chi) = 0$ — cfr. (6));

2° che $(\varphi\chi)$ riesca una funzione di t, delle p e delle q; e allora l'equazione

$$(\varphi\chi) = \text{cost.}$$

sarà, per (4), un integrale primo delle equazioni canoniche. Ma ancora potrà darsi:

a) che $(\varphi\chi)$ sia una funzione delle suddette variabili composta con φ e χ — cfr. (6):

b) che non lo sia: e in tal caso, nel quale le costanti α, β, γ, delle tre equazioni

$$\varphi = \alpha, \qquad \gamma = \beta, \qquad (\varphi\chi) = \gamma$$

non saranno legate da alcuna relazione, la terza equazione costituirà un nuovo integrale primo delle equazioni canoniche, indipendente dai primi.

Osserviamo che il terzo integrale si deduce per questa via dai primi due con un calcolo che non implica alcuna integrazione, ma semplici derivazioni. E perciò Jacobi * presumendo che questo procedimento, successivamente applicato, potesse servire ad un'agevole determinazione di numerosi integrali, attribuisce al precedente teorema un'importanza, che, alla stregua delle applicazioni, non possiede: poichè ben presto si ritrova il caso della costante, o della funzione dei primi membri dei precedenti integrali.

Applicazione. — Abbiasi un sistema isolato di n punti liberi. Sussisterà il teorema della conservazione delle aree (§ 33), rappresentato dai tre integrali primi

$$\Sigma (yz - z\eta) = \alpha, \qquad \Sigma (z\xi - x\zeta) = \beta, \qquad \Sigma (x\eta - y\xi) = \gamma$$

dove le q sono rappresentate dalle x, y, z e le p dalle ξ, η, ζ di tutti i punti.

Poniamo

$$\Sigma (y\zeta - z\eta) = \varphi, \qquad \Sigma (z\xi - x\zeta) = \chi,$$

Si trova immediatamente

$$(\varphi\chi) = \Sigma (x\eta - y\xi).$$

Quindi uno qualunque dei precedenti integrali si deduce col procedimento di Poisson dagli altri due.

Integrali in involuzione.

§ 127. — Sia H indipendente dal tempo esplicito, per modo che le equazioni canoniche ammettano l'integrale primo indipendente dal tempo

$$H = \gamma,$$

---

* *Vorlesungen über Dynamik*. 34te Vorles.

e la ricerca del relativo sistema integrale si riduca (§ 121) a quella della funzione caratteristica, U, integrale completo dell'equazione alle derivate parziali del 1° ordine e del secondo grado

$$H\left(\frac{\partial U}{\partial q}, q\right) = \alpha. \tag{1}$$

Indicando parimente, per brevità di scrittura, con H_i $(i = 1, 2, \ldots n - 1)$ $n - 1$ funzione delle p e delle q, supponiamo che

$$H_i = \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n - 1)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, rappresentano n costanti arbitrarie, costituiscano altrettanti integrali primi indipendenti dal tempo delle equazioni canoniche.

Intendiamo che sia, in generale,

$$D = \frac{\partial (H, H_1, H_2, \ldots H_{n-1})}{\partial p_1, \partial p_2, \ldots \partial p_n} \gtrless 0,$$

conformemente a che dal sistema di n equazioni

$$H = \alpha, \quad H_1 = \alpha_1, \quad H_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad H_{n-1} = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

si concepiscano determinate le $p_1, p_2, \ldots p_n$ in funzione delle $q_1, q_2, \ldots q_n$ e delle n costanti arbitrarie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$.

Allora, ove

$$p_1\, dp_1 + p_2\, dq + \cdots + p_n\, dq_n$$

risulti un differenziale esatto, la relativa funzione, determinabile con semplici quadrature, sarà la funzione caratteristica, U. Perchè conterrà, oltre α, $n - 1$ costante arbitraria, e sarà

$$p_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \qquad \cdots \qquad p_n = \frac{\partial U}{\partial q_n} \tag{3}$$

con che dalla prima delle (2) scaturisce (1); che se, eliminando le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, si potesse giungere altrimenti ad una relazione fra le $\dfrac{\partial U}{\partial q}$ non riducibile a (1), ne seguirebbe, per (3), una relazione fra le p e le q senza parametri arbitrarii (cfr. § 120).

Si presenta quindi la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per questo, e cioè perchè si verifichino le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \qquad (i, j = 1, 2, \dots n, \quad i \gtrless j)$$

dove p è assunto come simbolo delle funzioni delle q e delle α determinate dalle (2) nel modo indicato.

§ 128. — *Teorema.* Concepite da

$$H = \alpha, \quad H_1 = \alpha_1, \quad H_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad H_{n-1} = \alpha_{n-1}, \tag{1}$$

colla condizione che sia, in generale,

$$D = \frac{\partial (H, H_1, H_2, \dots H_{n-1})}{\partial p_1 \; \partial p_2, \dots \partial p_n} \gtrless 0, \tag{2}$$

determinate le $p_1, p_2, \dots p_n$ in funzione delle $q_1\ q_2, \dots q_n$, condizione necessaria e sufficiente perchè

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n$$

riesca un differenziale esatto, è che si verifichino identicamente le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni

$$(H_i\ H_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots n, \quad i \gtrless j). \tag{3}$$

Difatti, concepite le due equazioni

$$H_i = \alpha_i, \qquad H_j = \alpha_j$$

rese identiche, col porvi per le p le funzioni delle q ricavate dalle (1), se ne deduce

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_r} + \Sigma_s \frac{\partial H_i}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial q_r} = 0$$

$$\frac{\partial H_j}{\partial q_s} + \Sigma_r \frac{\partial H_j}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial q_s} = 0.$$

Quindi anche

$$\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial H_i}{\partial q_r} + \Sigma_s \frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial q_r} = 0$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial q_s} + \Sigma_r \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q_s} = 0.$$

La prima deve stare per qualunque valore di r, e la seconda per qualunque valore di s, che ambedue ricevono i valori 1, 2, ... n. Quindi avremo anche

$$\Sigma_r \frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial H_i}{\partial q_r} + \Sigma_r\Sigma_s \frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial q_r} = 0$$

$$\Sigma_s \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial q_s} + \Sigma_s\Sigma_r \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q_s} = 0,$$

la seconda delle quali, siccome r ed s percorrono gli stessi valori, può scriversi

$$\Sigma_r \frac{\partial H_i}{\partial p_r}\frac{\partial H_j}{\partial q_r} + \Sigma_r\Sigma_s \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q_s} = 0;$$

per modo che, sottraendone la precedente, si trova

$$(H_i\, H_j) + \Sigma_r\Sigma_s \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right) = 0.$$

E di qui si conclude senz'altro che le (3) sono condizione necessaria.

Esse sono poi condizioni sufficienti. Difatti, supposto che si verifichino, le precedenti relazioni si riducono a

$$\Sigma_r\Sigma_s \frac{\partial H_i}{\partial p_s}\frac{\partial H_j}{\partial p_r}\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right) = 0; \tag{4}$$

le quali sono $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni lineari omogenee fra le diffe-

renze in egual numero

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n, \quad r \gtrless s)$$

per modo che ne verrebbe senz'altro che queste differenze debbono essere tutte nulle, se si potesse subito riconoscere che il determinante dei coefficienti è diverso da zero.

Procediamo invece nel seguente modo. Rappresentiamo con D_{jr}, D_{is}, gli aggiunti degli elementi $\frac{\partial H_j}{\partial p_r}, \frac{\partial H_i}{\partial p_s}$ nel determinante D. Da (4) segue

$$D_{jr'} \, D_{js'} \, \Sigma_r \Sigma_s \, \frac{\partial H_i}{\partial p_s} \frac{\partial H_j}{\partial p_r} \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r} \right) = 0,$$

ed anche

$$\Sigma_i \, \Sigma_j \, D_{jr'} D_{is'} \, \Sigma_r \Sigma_s \, \frac{\partial H_i}{\partial p_s} \frac{\partial H_j}{\partial p_r} \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r} \right) = 0,$$

o scrivendo diversamente, com'è permesso dalla indipendenza degli indici,

$$\Sigma_r \, \Sigma_s \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r} \right) \Sigma_i \, D_{is'} \, \frac{\partial H_i}{\partial p_s} \, \Sigma_j \, D_{jr'} \, \frac{\partial H_j}{\partial p_r} = 0.$$

Ora si ha

$$\Sigma_i \, D_{is'} \, \frac{\partial H_i}{\partial p_s} = \begin{cases} D & s = s' \\ 0 & s \gtrless s' \end{cases}$$

$$\Sigma_j \, D_{jr'} \, \frac{\partial H_j}{\partial p_r} = \begin{cases} D & r = r' \\ 0 & r \gtrless r' \end{cases}$$

Quindi la precedente relazione si riduce a

$$\left(\frac{\partial p_{r'}}{\partial q_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial q_{r'}} \right) D^2 = 0$$

donde, per (2), si conclude

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r} = 0.$$

C. V. D.

§ 129. — Da questo teorema, collegato colle premesse considerazioni, scaturisce la proposizione seguente.

Teorema. — Supposta la funzione H indipendente dal tempo esplicito, e noti, oltre $H = \alpha$, altri $n - 1$ integrali primi indipendenti dal tempo, $H_j = \alpha_i$, dove le α_i rappresentano $n - 1$ costanti arbitraria, delle equazioni canoniche del movimento, ove non sia identicamente $D = 0$, e si verifichino identicamente le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni $(H_i H_j) = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots n,\ i \gtrless j)$, l'integrazione delle equazioni canoniche si completa con semplici quadrature.

Le $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni H_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, che soddisfanno le relazioni in discorso, si dicono formare un « sistema in involuzione », con termine di Lie, conformemente al quale diremo in involuzione anche i corrispondenti integrali delle equazioni canoniche.

Osservazione. — Notiamo che le n relazioni

$$(HH_1) = 0, \qquad (HH_2) = 0, \quad \cdots \quad (HH_{n-1}) = 0$$

si verificano senz'altro in quanto $H_1 = \alpha_1$, $H_2 = \alpha_2$, ... $H_{n-1} = \alpha_{n-1}$ s'intendono integrali primi indipendenti dal tempo delle equazioni canoniche [cfr. (5) del § 124].

Applicazioni.

§ 130. — Segue dal precedente teorema che, se, in un problema di movimento a due coordinate*, i vincoli e la funzione delle forze sono indipendenti dal tempo, basta la conoscenza di

* E inteso qua, e in seguito, coordinate libere.

un integrale primo, indipendente dal tempo, oltre quello della conservazione dell'energia, per compiere per mezzo di semplici quadrature l'integrazione del relativo sistema di equazioni differenziali, e risolvere il problema.

Rientrano senz'altro in questo caso

il movimento centrale di un punto, nell'ipotesi che la forza sia funzione della sola distanza del punto dal centro: in cui il secondo integrale è quello della conservazione delle aree:

il movimento del pendolo semplice (conico), in cui il secondo integrale è quello della conservazione delle aree, rispetto al punto di sospensione, in un piano orizzontale (cfr. § 77).

Consideriamo anche il movimento di un solido con un punto fisso. Il problema è a tre coordinate, per le quali si possono prendere gli angoli di direzione

$$q_1 = \theta, \qquad q_2 = f, \qquad q_3 = \varphi$$

di una terna d'assi fissa al corpo coll'origine nel punto fisso (§21). Con ciò l'espressione della forza viva riesce una funzione quadratica omogenea delle $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ a coefficienti costanti (cfr. § 6), e perciò $q_3 = \varphi$ non vi figura esplicitamente [cfr. (3) del § 3]. Allora, ogniqualvolta le forze impresse ammettano funzione delle forze, che pure non dipende da φ, l'equazione canonica

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

fornisce immediatamente l'integrale indipendente dal tempo

$$p_3 = \text{cost.}$$

Il significato di questo integrale è assai semplice. Si ha difatti, per le (3) del § 3,

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}} \gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{q}} \gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} \gamma_3,$$

con che p_3 rappresenta la componente secondo l'asse delle z della quantità di moto areale rispetto al punto fisso come polo (cfr. § 108, *Osservazione 2ª*). E per conseguenza la trovata equazione integrale esprime che si verifica, rispetto allo stesso

punto, nel piano dell'angolo φ, il teorema della conservazione delle aree.

Ammesso ora che la funzione delle forze impresse neppure dipenda da t, si verificherà il teorema della conservazione dell'energia, che fornisce l'integrale

$$H(p_1, p_2, p_3, \theta, f) = \alpha.$$

Supponiamo ora di conoscere un terzo integrale primo, indipendente da t e da φ.

$$H'(p_1, p_2 p_3, \theta, f) = \alpha'.$$

Tanto basterà perchè i rimanenti integrali si possano determinare per mezzo di quadrature.

Essendo infatti

$$\frac{\partial p_3}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial p_3}{\partial p_1} = \frac{\partial p_3}{\partial p_2} = 0, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial p_3} = 1,$$

$$\frac{\partial H'}{\partial \varphi} = 0,$$

si ha

$$(H' \varphi) = 0.$$

Queste ipotesi si verificano nel movimento per inerzia (§§ 62-70), in cui si ha $W = 0$. Il terzo integrale, esprimente la costanza della grandezza della quantità di moto areale rispetto al punto fisso (§ 64), è fornito, in questo caso, come il secondo, dal teorema della conservazione delle aree rispetto a detto punto *.

Nel movimento per gravità (inteso il centro di massa distinto dal punto fisso, chè diversamente si ricade nel caso precedente [§ 72]), dirigendo l'asse delle z secondo la verticale del punto

---

* Per la determinazione della funzione caratteristica di questo problema V. *F. Siacci: Sulla funzione caratteristica del moto di rotazione di un corpo non sollecitato da forze* (Atti della R. Acc. delle scienze di Napoli, vol. VI, 1893).

fisso volta in basso, si ha

$$W = Mg(\mathfrak{x}\gamma_1 + \mathfrak{y}\gamma_2 + \mathfrak{z}\gamma_3),$$

dove M e $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ indicano la grandezza della massa del corpo e le coordinate rispetto agli assi mobili del centro di massa. Quindi ancora H non dipende da t e da φ. Ma il terzo integrale, occorrente per compiere l'integrazione mediante quadrature, non è generalmente conosciuto.

Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso sia di rotazione, e il centro di massa cada sull'asse polare, assumendo questo per asse delle $\mathfrak{z}$, per modo che gli assi mobili siano assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, oltre di che $P = Q$, le equazioni di Euler [(1) del § 71] forniscono immediatamente per questo integrale

$$\mathfrak{r} = \text{cost.}$$

Questo è il caso indicato per la prima volta da Lagrange e ritrovato in seguito da Poisson, che si designa ordinariamente coi loro nomi (cfr. § 74).

Sofia Kovalevskij scoperse il nuovo caso, che a lei s'intitola, (§ 75), ricercando le condizioni perchè gl'integrali generali delle equazioni differenziali del movimento in discorso (§ 71), dove t si concepisca come variabile complessa, presentino al finito singolarità *polari:* conforme alle quali trovò oltre i casi noti di Euler e Poinsot (§ 72), e di Lagrange e Poisson (§ 74), l'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia relativo al centro di massa restando, come nel secondo dei suddetti casi, un ellissoide di rotazione, il centro di massa cada nel piano equatoriale, e si verifichi la condizione

$$P = Q = 2R. \; *$$

* Appelroth completò questa parte del lavoro di S. Kovalevskij principalmente nella Memoria col titolo — tradotto dal russo — *Sul problema del movimento di un corpo rigido grave intorno ad un punto* (Mosca, 1893), dove dimostra che i nominati tre casi sono i soli possibili, se gl'integrali sono uniformi: mentre, supposto solo che ammettano *poli*, bisogna aggiungervi il « caso di Hess » (Math. Ann., t. XXXVII) illustrato da Nekrassoff (Ibid., t. XLVII):

$$\mathfrak{y} = 0 \qquad P(Q-R)\,\mathfrak{x}^2 = R(P-Q)\,\mathfrak{z}^2 \qquad P > Q > R.$$

Le equazioni (1) del § 71 diventano con questo (fatto $\mathfrak{p} = 0$)

$$2\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{q}\mathfrak{r}, \quad 2\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = -\mathfrak{r}\mathfrak{p} - A\gamma_3, \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = A\gamma_2$$

$$A = \frac{Mg\mathfrak{r}}{R};$$

e si riconosce facilmente come il sistema formato da queste equazioni e dalle (2) dello stesso paragrafo ammetta l'integrale, rispondente alle indicate condizioni,

$$\left[(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}i)^2 + A(\gamma_1 + \gamma_2 i)\right]\left[(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}i)^2 + A(\gamma_1 - \gamma_2 i)\right] = \text{cost.}$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

R. Liouville * dimostrò poi che condizione necessaria e sufficiente perchè esista un quarto integrale primo algebrico indipendente dal tempo delle suddette equazioni (1), (2) del § 71 (che non implicano φ)** è che si verifichi l'ipotesi di Sofia Kovalevskij, generalizzata colla condizione

$$P = Q = \frac{2}{n} R,$$

dove n rappresenta un numero intero positivo: la quale, stando la relazione generale $2P \gtrless R$, riesce però soltanto suscettibile dei valori 1 (caso di S. Kovalevskij), 2 (sfera, rientrante nel caso di Lagrange e Poisson), 3 e 4 (casi nuovi)***.

---

* *Acta Mathematica*, t. XX. Vedi anche *Appell: Traité de Mécanique* (II Partie), §§ 401, 406.

** Concependo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ espresse per le coordinate f, θ, uno di questi integrali si riduce alla relazione identica $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

*** Ci limitiamo a brevi notizie concernenti più direttamente l'applicazione del procedimento in discorso. Del resto, il problema del movimento polare di un solido grave è stato oggetto di molteplici studii, oltre i ricordati. Abbiamo citato in nota al § 74 (pag. 111) alcuni lavori italiani concernenti il caso di Lagrange e Poisson. Aggiungiamo qua, a proposito d'altri casi, *T. Levi Civita: Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. X, 1901) e *R. Marcolongo: Osservazioni intorno alla nota del sig. Kolossoff: « Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant, etc.* (Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, t. XVI, 1902).

Conclusioni sui procedimenti d'integrazione.

§ 131. — Il teorema di Jacobi riduce l'integrazione delle equazioni canoniche alla ricerca della funzione principale, e per conseguenza all'integrazione di un'equazione alle derivate parziali del 1° ordine e di 2° grado (§ 120).

Quando si può valersi della funzione caratteristica, questa, oltre che ricavare da un'equazione come la precedente, con una variabile di meno, il tempo (§ 121), si potrà esprimere (§ 129) con

$$U = \int (p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n),$$

dove le $p_1, p_2, \ldots p_n$ sono altrettanti funzioni delle $q_1, q_2, \ldots q_n$ e di n costanti arbitrarie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, ricavate, risolvendo per rispetto alle p le n equazioni $H = \alpha$ $H_1 = \alpha_1$ ...... $H_{n-1} = \alpha_{n-1}$, i primi membri delle quali, dopo $H = (T) - W$, sono $n - 1$ funzione, come questa, delle p e delle q, che soddisfanno alle $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni

$$\begin{array}{llll} (HH_1) = 0 & (H\,H_2) = 0 & \ldots & (H\,H_{n-1}) = 0 \\ & (H_1\,H_2) = 0 & \ldots & (H_1\,H_{n-1}) = 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & & & (H_{n-2}\,H_{n-1}) = 0. \end{array}$$

Queste equazioni esprimono che H_1 dev'essere una soluzione di

$$(H\varphi) = 0,$$

equazione alle derivate parziali del 1° ordine lineare; H_2 una soluzione comune del sistema

$$(H\varphi) = 0 \qquad (H_1\varphi) = 0$$

di due equazioni alle derivate parziali del 1° ordine lineare: e

così via, finchè H_{n-1} dev'essere una soluzione comune del sistema

$$(H\varphi) = 0 \qquad (H_1\varphi) = 0 \qquad \dots \qquad (H_{n-2}\varphi) = 0,$$

di $n-1$ equazione di quella specie.

Concependo assunti questi successivi sistemi di equazioni simultanee per determinare le $H_1, H_2, \dots H_{n-1}$, la ricerca del sistema integrale generale delle equazioni canoniche — $2n$ funzioni con $2n$ costanti arbitrarie — è ridotto a quella di $n-1$ funzione, senza elementi arbitrarii, soluzioni particolari di un sistema di equazioni alle derivate parziali di 1° ordine lineari, composto di 1, di 2, di 3 ecc. fino a $n-2$ equazioni. Per riconoscere il vantaggio che da questo potrà, per avventura, ricavarsi, occorre inoltrarsi nello studio dei metodi di Jacobi, di Mayer, di Lie, per la ricerca delle soluzioni comuni di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 1° ordine, lineari. Comunque sia, tale vantaggio riesce naturalmente subordinato alle particolari circostanze dei problemi proposti.

Rileviamo infine che l'esposta teoria, col permettere di affermare *a priori* il compimento dell'integrazione per quadrature, noto un certo numero d'integrali primi, fornisce, in qualche problema, come quelli che abbiamo esaminato (§ 130), una guida ed una misura del lavoro d'integrazione del problema medesimo.

Sull'ultimo moltiplicatore di Jacobi.

§ 132. — Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{1}$$

dove $X, X_1, \dots X_n$ sono funzioni regolari di $x, x_1, \dots x_n$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè

$$\varphi(x, x_1, x_2, \dots x_n) = \alpha_n$$

sia un integrale primo di quel sistema è che $\varphi(x, x_1, \dots x_n)$ sia

una funzione effettiva, che soddisfa l'equazione alle derivate parziali del 1° ordine lineare (cfr. § 124).

$$X \frac{\partial \omega}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0. \tag{2}$$

Allora, poichè si dimostra l'esistenza del sistema integrale di (1) sotto la forma

$$\varphi_i (x, x_1, x_2, \dots x_n) = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \dots n) \tag{3}$$

ne risulta dimostrato che (2) è soddisfatta da n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ fra loro indipendenti. Come pure ne viene che $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = \text{cost.}$ sarà un integrale primo di (1), poichè il primo membro soddisfa (2); e reciprocamente che ogni soluzione di (2) diversa da $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ sarà una funzione composta con queste: poichè scritta (2) per $n+1$ forma di ω, siccome $X, X_1, \dots X_n$ non saranno identicamente nulle, dovrà annullarsi identicamente $\dfrac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \varphi_{n+1})}{\partial x, \partial x_1, \dots \partial x_n}$.

Ciò premesso, concepiamo dalle $n - 1$ delle (3), che seguono la prima, ricavate $x_2, x_3, \dots x_n$ in termini di x, x_1 e delle costanti α_i $(i = 2, 3, \dots n)$, con che è inteso, generalmente,

$$\Delta = \frac{\partial (\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n)}{\partial x_2 \, \partial x_3 \dots \partial x_n} \gtrless 0.$$

E indichiamo con Φ' la funzione di x, x_1, implicante le suddette α_i, che si ottiene sostituendo in Φ a $x_2, x_3, \dots x_n$ quella loro espressione.

Il principio dell'ultimo moltiplicatore consiste in questo che, indicando con M una soluzione qualsivoglia dell'equazione alle derivate parziali del 1° ordine lineare

$$\frac{\partial (M X)}{\partial x} + \frac{\partial (M X_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (M X_n)}{\partial x_n} = 0, \tag{4}$$

la funzione di x, x_1 rappresentata da $\dfrac{M'}{\Delta'}$ è un fattore integrante dell'equazione in x, x_1

$$X_1' \, dx - X' \, dx_1 = 0. \tag{5}$$

Che se s'immaginano noti i suddetti $n-1$ integrale, e formato nel modo indicato quel fattore integrante, coll'ajuto del quale integrata (5) con una quadratura, introducendo nell'integrale di questa, conformemente alle (3), $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ al posto di $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, si avrà il rimanente integrale delle (1).

M si chiama, con termine di Jacobi, un moltiplicatore delle (1).

Consideriamo il caso di due equazioni

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{6}$$

per brevità di discorso, avvertendo che il ragionamento sta in generale.

Allora il sistema integrale sarà formato da

$$\varphi(x, y, z) = \alpha \qquad \chi(x, y, z) = \beta. \tag{7}$$

E per (2) si avrà

$$\frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z} \tag{8}$$

indicando con A, B, C i maggiori contenuti nella matrice

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{array} \right|.$$

Indichiamo con $\overline{M}$ il valor comune dei rapporti. Sarà $\overline{M}$ senz'altro una soluzione di

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Concepiamo ora dalla seconda delle (7) ricavato z in funzione di x, y e β, con che intendiamo che $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ non sia identicamente nulla, e indichiamo, in generale, con Φ' la funzione di x, y,

implicante β, che si ricava da Φ sostituendo a z quella sua espressione. Per (8),

$$Y'\,dx - X'\,dy = 0$$

può scriversi

$$B'\,dx - A'\,dy = 0.$$

Ora, si trova subito

$$A' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)', \qquad B' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)'.$$

Quindi

$$\frac{B'\,dx - A'\,dy}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)'} = \frac{\overline{M}'}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)'}(Y'\,dx - X'\,dy) = -d\varphi'. \qquad (10)$$

Resta da dimostrare che una soluzione M, presa comunque *a priori*, di (9) serve parimente allo scopo. E perciò osserviamo che, scritta (9) per M e per $\overline{M}$, se ne deduce immediatamente

$$X\frac{\partial \log \frac{M}{\overline{M}}}{\partial x} + Y\frac{\partial \log \frac{M}{\overline{M}}}{\partial y} + Z\frac{\partial \log \frac{M}{\overline{M}}}{\partial z} = 0:$$

con che $\log \frac{M}{\overline{M}}$ riesce una soluzione della stessa equazione (2) di cui φ e χ sono soluzioni indipendenti: donde si conclude che $\log \frac{M}{\overline{M}}$ e $\frac{M}{\overline{M}}$ devono essere funzioni composte con φ e χ. Poniamo quindi

$$M = \overline{M} f(\varphi, \chi).$$

Ne viene

$$M' = \overline{M}' f(\varphi', \beta).$$

Quindi, per (10),

$$\frac{M'}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)'}(Y'\,dx - X'\,dy) = -f(\varphi', \beta)\,d\varphi' = -d\int^{\varphi'} f(\varphi', \beta)\,d\varphi'. \quad (11)$$

Che se concepiamo M e χ note, e φ simbolo di funzione esistente ancor che incognita, si avrà con una quadratura l'integrale da aggiungere a $\chi = \beta$ per compiere il sistema: perchè, facendo nell'integrale di (11) $\beta = \chi$, se ne ricaverà $F(\varphi, \chi) =$ cost. che sarà un integrale di (1) distinto da quello.

Riprendendo il caso generale, la (4) è soddisfatta da $M = 1$, quando

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0. \quad (12)$$

E perciò in questo caso un fattore integrante di (5) è senz'altro $\frac{1}{\Delta'}$.

§ 133. — Ora questo caso si presenta per le equazioni della Dinamica [(6) e (7) del § 117].

$$\frac{dp}{Q - \frac{\partial K}{\partial q}} = \frac{dq}{\frac{\partial K}{\partial p}} = dt,$$

ogniqualvolta le Q si suppongono indipendenti dalle p. Quindi in tale ipotesi, compresa nella forma canonica, trovati $2n - 1$ integrale primo, fra loro indipendenti, il $2n^{mo}$ si calcola con una quadratura.

§ 134. — Colla nozione dell'ultimo moltiplicatore si ritrovano agevolmente i risultati riferiti, come applicazioni, al § 130.

Nel caso del problema a due coordinate, scriviamo le equazioni canoniche sotto la forma

$$\frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}} = \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = dt.$$

Prescindendo, per un momento, dall'ultimo membro, abbiamo un sistema di tre equazioni differenziali in p_1, p_2, q_1, q_2

(essendo H indipendente da t). L'integrazione di questo si ridurrà alle quadrature, pur di conoscere un integrale indipendente dal tempo, oltre quello della conservazione dell'energia. E allora, espresse in funzione di una variabile — sia u, e v la corrispondente p o q — le tre rimanenti, si avrà t con una quadratura da

$$dt = \frac{du}{\pm \frac{\partial H}{\partial v}}.$$

Nel caso del movimento polare di un solido grave, scriviamo ancora

$$\frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial \theta}} = \frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial f}} = \frac{dp_3}{-\frac{\partial H}{\partial \varphi}} = \frac{d\theta}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{df}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{d\varphi}{\frac{\partial H}{\partial p_3}} = dt.$$

Prescindendo, per un momento, dagli ultimi due membri, abbiamo un sistema di quattro equazioni differenziali fra θ, f, p_1, p_2, p_3 (essendo H indipendente da t e da φ) delle quali sono due integrali

$$H = \text{cost.} \qquad p_3 = \text{cost.}$$

e si verifica la relazione corrispondente a (12) del § 132; per cui basta la conoscenza di un terzo integrale delle medesime, perchè se ne compia l'integrazione per quadrature. In seguito a che, concepite tutte le variabili espresse in termini di una, che indichiamo con u, mentre con v indichiamo la corrispondente p o q, a seconda del caso, le equazioni

$$\frac{du}{\pm \frac{\partial H}{\partial v}} = d\varphi, \qquad \frac{du}{\pm \frac{\partial H}{\partial v}} = dt$$

forniranno φ e t con una quadratura.

Si ritrova così che la conoscenza del suddetto terzo integrale permette di compiere con quadrature l'integrazione delle proposte equazioni del movimento.

FINE.

INDICE ALFABETICO

(I numeri indicano i paragrafi).

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

Q

R

S

T

U

V

APPUNTI

§ 3. — Pel proseguimento di φ, f, θ per via di successione continua, giova intendere che φ ed f possano contarsi ad arbitrio dalle due metà del piano contenente gli assi delle z e delle $\mathfrak{z}$, invertendo il segno di θ, quando al semipiano contenente l'asse delle $\mathfrak{z}$, o delle z, positivo, si sostituisce il semipiano complementare.

Col significato più generale dell'angolo θ, la misura $\frac{d\theta}{dt}$ della velocità angolare corrispondente si riferirà alla perpendicolare al piano degli angoli z e $\mathfrak{z}$, presa nel senso positivo rispetto a quello in cui θ, contato da z, riesce crescente.

§ 20. — Notiamo che λ, μ, ν, componenti della velocità del punto invariabilmente connesso col piano, che cade, al tempo t, nell'origine degli assi fissi, e $\varpi, \varkappa, \rho$ componenti della velocità angolare del piano, saranno collegate con A, B, C, D con questo, che sarà

$$A\lambda + B\mu + C\nu = -\dot{D}$$

(cfr. § 16): e posto

$$A\varpi + B\varkappa + C\rho = \sigma,$$

$$\varpi' = \varpi - A\sigma, \qquad \varkappa' = \varkappa - B\sigma, \qquad \rho' = \rho - C\sigma,$$

le $\varpi', \varkappa', \rho'$ soddisfaranno le stesse condizioni che $\varpi, \varkappa, \rho$ nei §§ 17, 18.

§ 21. — Col dire che i parametri più generali rappresentano la posizione del sistema, resta inteso che riescono, alla lor volta, determinati dalle relazioni stabilite fra essi e le coordinate normali, e dalle condizioni esistenti fra queste.

§ 35. — L'ipotesi che le forze dipendano, in generale, dall'atto di movimento (ma non dal tempo), occorrente per ab-

bracciare certi casi d'equilibrio relativo, non introduce alcun sostanziale mutamento.

§ 43. — Cfr. in proposito il § 101.

§ 52. — La relazione fra $\frac{d}{dt}$ e δ si può riassumere con questo, che si passa dalle formole esplicite relative al primo operatore alle omologhe relative al secondo, moltiplicando per dt, *poi* facendo $dt = 0$, e mutando $d\xi$ in $\delta\xi$.

Nelle ultime linee dello stesso paragrafo, « potenziale » è usato col significato di « funzione delle forze », a proposito di che si veda il suddetto § 101. Meglio si indicherà, pel momento, il caso in discorso come quello in cui

$$\Pi = \delta W = \Sigma' \frac{\partial W}{\partial \eta} \delta\eta.$$

§ 93. — È ben inteso che ogniqualvolta si impiegherà la forma differenziale delle relazioni fra i coseni α_s, β_s, γ_s si terrà presente anche la forma finita, conformemente alla quale va determinato il valore delle costanti d'integrazione.

§ 101. — Per fissar le idee, nell'ultima deduzione da (18), si parta dall'ipotesi che le ξ vi rappresentino coordinate normali.

§ 114. — Indichino (u, v, w) la velocità del punto generico del sistema al tempo t, e (Dx, Dy, Dz), $(D'x, D'y, D'z)$ gli spostamenti dello stesso punto relativi al passaggio dalla posizione a t alla posizione a $t + Dt$, nelle due ipotesi del movimento effettivo e del movimento corrispondente alle supposte forze impresse, senza vincoli. Inteso Dt evanescente, abbiamo, arrestandoci ai termini di secondo ordine,

$$Dx = u\,Dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}Dt^2, \qquad D'x = u\,Dt + \frac{1}{2}X\,Dt^2,$$

e le formole analoghe; donde

$$\int_\tau k\left[(Dx - D'x)^2 + (Dy - D'y)^2 + (Dz - D'z)^2\right]d\tau = \frac{1}{4}I\,Dt^4.$$

Così, ciò che Gauss chiama lo « Zwang » riesce $\frac{1}{4}\,I\,Dt^4$.

Pel confronto colle formole del § 112, avvertiamo che, nel presente paragrafo, si è ommesso, per brevità, Σ.

ERRATA

Pag. 9 riga 14 dall'alto — *invece di* (7") *leggi* (5").
» 11 » 7 » — *sopprimi* (1).
» 20 nella prima delle (2) *leggi* l.
» 39 righe 8 e 5 dal basso — *invece di* (6) *leggi* (4) del § 14.
» 41 alla prima agrafa si apponga (1).
» 47 riga 12 dal basso — *leggi* $\sum_{\tau} \int$.
» 53 » 19 dall'alto — *leggi* $\frac{d^2 z}{d t^2} = 0$.
» 56 » 13 dal basso — *invece di* certe *leggi* stesse.
» 61 » 16 dall'alto — *invece di* § 23 *leggi* § 24.
» 62 » 7 » — *invece di* § 45 *leggi* § 46.
» 73 » 12 dal basso — *leggi* (§ 22).
» 75 » 7 dall'alto — *leggi* L.
» 77 » 6 » — *In principio a questa riga si trasporti dalla pagina seguente* § 53.
» 96 » 12 dal basso — *segna le formole* con (2).
» 97 » 2 » » — *invece di* (3) *leggi* (2).
» ivi formola (5) — *leggi* $\theta = \theta_0$.
» 108 » (2) — *leggi* $2\, Mg\, (\mathfrak{x}\, \gamma_1 + \mathfrak{y}\, \gamma_2 + \mathfrak{z}\, \gamma_3)$.
» ivi riga 14 dall'alto — *invece di* (2) *leggi* (3).
» 113 » 14 dal basso — *invece di* (5) *leggi* (2).
» 115 » 1 dall'alto — *leggi* per determinare.
» 116 » 2 » — *invece di* riceva *leggi* riceve.
» ivi » 3 dal basso — *leggi* $\cos\theta < 0$.
» 126 » ultima — *alle due prime condizioni sostituisci* $\mu = 0$.
» 127 » 2 dall'alto — *sopprimi la prima eguaglianza.*
» 137 formola (7) — *invece di* $q_o)$ *leggi* q_o.
» 141, 142 — *leggi* k *invece di* κ.
» 145, 146 — *leggi* $D T$ *invece di* $D\mathrm{T}$.
» 151 nella formola (7) *leggi* $\Xi'_{i'}$.
» 158 riga 8 dal basso — *invece di* (1) *leggi* (2).
» 159 » 9 » » — *leggi* $d \Sigma \Xi_i\, \delta\xi = 0$.
» 181 » 10 dall'alto — leggi $2 \int_{t'}^{t''} T\, dt$.
» 182 nota ** — *sopprimi* Introductory remarks.
» 233 nella seconda delle (6) — *invece di* f_4 *leggi* f_k.